CHAPITRE 6

Inéquations – Systèmes d'équations

REVOIR

- les propriétés des inégalités liées aux opérations ;
- la représentation graphique d'une fonction affine.

DÉCOUVRIR

- la résolution d'une inéquation ;
- la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

SOCLE COMMUN

Aucune compétence n'est exigible au socle commun.

J'ai vu le trompettiste américain Wynton Marsalis au festival de jazz à Marciac.

Jazz in Marciac est un festival de jazz de renommée internationale qui se déroule chaque année au mois d'août dans la ville de Marciac, dans le Gers.

Depuis 1978, date de sa création, ce festival a reçu des musiciens de jazz célèbres comme Stan Getz, Michel Petrucciani, Herbie Hancock, Wynton Marsalis...

Pour un concert, deux prix de place sont proposés : le tarif enfant et le tarif adulte.
Une famille de deux adultes et trois enfants assiste à un concert et paie 70 €.
Une autre famille de deux adultes et cinq enfants assiste au même concert et paie 90 €.

- Calculer le tarif enfant, puis le tarif adulte.

ACTIVITÉS

1 Je découvre la notion d'inéquation

En vacances dans les îles grecques, Éléonore désire louer un scooter.
Le loueur propose deux tarifs différents :
- le tarif *Amorgos* : 0,90 € par kilomètre parcouru ;
- le tarif *Mykonos* : un forfait de 30 € et 0,50 € par kilomètre parcouru.

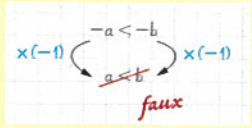
On désigne par x le nombre de kilomètres parcourus.

1 **a)** Exprimer en fonction de x le prix payé (en €) avec le tarif *Amorgos*.
b) Exprimer en fonction de x le prix payé (en €) avec le tarif *Mykonos*.
2 Éléonore veut savoir quand le tarif *Mykonos* est plus avantageux que le tarif *Amorgos*.
Justifier pour cela que le nombre x doit vérifier l'inégalité : $30 + 0{,}5x < 0{,}9x$.
On dit que $30 + 0{,}5x < 0{,}9x$ est une **inéquation** d'inconnue x.
3 Un nombre est **solution** de cette inéquation lorsqu'il vérifie l'inégalité $30 + 0{,}5x < 0{,}9x$.
a) Calculer le premier membre de cette inéquation pour $x = 100$.
b) Calculer le second membre de cette inéquation pour $x = 100$.
c) Le nombre 100 est-il solution de l'inéquation $30 + 0{,}5x < 0{,}9x$?
4 Le nombre 70 est-il solution de l'inéquation $30 + 0{,}5x < 0{,}9x$? Justifier la réponse.

2 Je revois les propriétés des inégalités

Je revois

a et b désignent deux nombres relatifs.
1 On veut comparer les nombres a et b sachant que $-a < -b$.
Voici la copie d'un élève annotée par son professeur :
Expliquer l'erreur commise par cet élève.



2 Dans chaque cas, comparer les nombres a et b.
a) $a + 3 < b + 3$; **b)** $3a < 3b$; **c)** $-3a < -3b$;
d) $a - 3 < b - 3$; **e)** $\frac{a}{3} < \frac{b}{3}$; **f)** $\frac{a}{-3} < \frac{b}{-3}$.

3 Je résous une inéquation

Pour résoudre l'inéquation $4 - 5x \leqslant 19$,
le professeur a écrit au tableau :
1 Justifier chacune des étapes suivies par le professeur.

2 On admet que les solutions de l'inéquation $4 - 5x \leqslant 19$ sont les mêmes que celles de l'inéquation $x \geqslant -3$.
a) Des nombres suivants, quels sont ceux qui sont solutions de l'inéquation $4 - 5x \leqslant 19$?
-1 | 0 | 3 | -3 | $-89{,}86$ | $-3{,}01$ | $-2{,}98$ | $-\sqrt{2}$ | 10^{100}

L'inéquation a une infinité de solutions.

b) Tracer une droite graduée et repasser en rouge tous les points de la droite dont l'abscisse est solution de l'inéquation $4 - 5x \leqslant 19$.

4 Je découvre les systèmes de deux équations

Deux collèges se retrouvent pour une sortie de fin d'année.
Chaque collège loue des canoës et des kayaks pour descendre une rivière.
Le collège Camille Claudel loue 5 canoës et 20 kayaks ; il paie 240 €. Le collège Boris Vian loue 10 canoës et 22 kayaks ; il paie 318 €.
On veut trouver le prix de location d'un canoë et celui d'un kayak.
On désigne par x le prix de location d'un canoë et par y le prix de location d'un kayak.
1 **a)** Exprimer en fonction de x et de y le prix payé par le collège Camille Claudel.
b) En déduire une égalité vérifiée par x et y.
On obtient une équation (E_1) à deux inconnues x et y.
c) Vérifier que cette égalité est vraie pour $x = 8$ et $y = 10$.
On dit que le **couple** $(8 ; 10)$ est solution de l'équation (E_1).
d) Parmi les couples suivants, lesquels sont solutions de l'équation (E_1) ?
$(10 ; 8)$ | $(4 ; 11)$ | $(6 ; 10{,}5)$ | $(12 ; 9)$ | $(23 ; 4)$
2 **a)** Écrire l'équation (E_2) qui traduit le prix payé par le collège Boris Vian.
b) Parmi les couples suivants, lesquels sont solutions de l'équation (E_2) ?
$(10 ; 8)$ | $(4 ; 11)$ | $(6 ; 10{,}5)$ | $(12 ; 9)$ | $(23 ; 4)$ | $(8 ; 10)$
3 Le couple solution cherché doit vérifier **simultanément** les deux équations (E_1) et (E_2).
On dit que ce couple est solution du **système** de deux équations à deux inconnues ci-contre :

$$\begin{cases} 5x + 20y = 240 & (E_1) \\ 10x + 22y = 318 & (E_2) \end{cases}$$

a) En utilisant les questions **1** et **2**, proposer un couple solution de ce système.
b) Quel est le prix de location d'un canoë et le prix de location d'un kayak ?

5 J'interprète graphiquement un système de deux équations

TICE

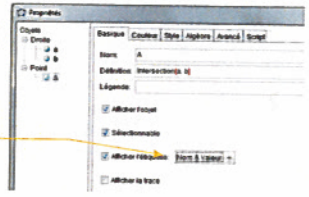
Pour cette activité, on utilise un logiciel de géométrie, par exemple **GeoGebra** *(voir page II).*
On considère le système de deux équations à deux inconnues ci-contre :

$$\begin{cases} 4x - 2y = -3 & (E_1) \\ -6x + 2y = 1 & (E_2) \end{cases}$$

1 On étudie les couples $(x ; y)$ solutions de l'équation (E_1) : $4x - 2y = -3$.
a) Dans la zone de saisie, en bas de l'écran, taper « $4x - 2y = -3$ », puis valider.
b) Justifier que $y = 2x + 1{,}5$.
c) Quelle est la nature de la fonction $x \mapsto 2x + 1{,}5$? Que dire de sa représentation graphique ?
2 Utiliser le logiciel pour représenter les solutions de l'équation (E_2).
3 **a)** Créer A, le point d'**intersection** entre les deux droites tracées à l'écran.

VOIR PAGES VOIR FICHES VI

b) Afficher les coordonnées du point A. Pour cela :
- avec le bouton droit de la souris, cliquer sur le point A ;
- dans la fenêtre qui apparaît, sélectionner « Propriétés », puis « Nom&Valeur », et cliquer sur « Fermer ».



c) À quoi correspondent les coordonnées du point A pour le système ?

COURS

1 Inéquations à une inconnue

a) Vocabulaire

DÉFINITION Une **inéquation** à une inconnue est une inégalité dans laquelle une lettre désigne un nombre inconnu.
Une **solution** d'une inéquation est un nombre qui vérifie l'inégalité.
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes ses solutions.

EXEMPLE : $3x - 5 > 4 + 7x$ est une inéquation d'inconnue x.
Pour $x = 2$, on a : $3 \times 2 - 5 = 1$ et $4 + 7 \times 2 = 18$.
On a : $1 < 18$, donc le nombre 2 n'est pas solution de cette inéquation.
Si $x = -5$, on a : $3 \times (-5) - 5 = -20$ et $4 + 7 \times (-5) = -31$.
On a : $-20 > -31$, donc le nombre -5 est une solution de cette inéquation.

b) Propriétés des inégalités

PROPRIÉTÉ **Addition et inégalité**
a, b et c désignent trois nombres relatifs.
Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$.

Lorsque l'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de cette inégalité.

EXEMPLE : Si $x + 3 \geqslant -7$
alors $x + 3 + (-3) \geqslant -7 + (-3)$.
Donc : $x \geqslant -10$.

PROPRIÉTÉ **Multiplication et inégalité**
a, b et c désignent trois nombres relatifs.
- Si $a \leqslant b$ et $c > 0$, alors $a \times c \leqslant b \times c$.
- Si $a \leqslant b$ et $c < 0$, alors $a \times c \geqslant b \times c$.

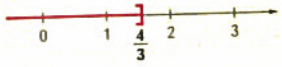
Lorsque l'on multiplie par un même nombre non nul les deux membres d'une inégalité :
- si ce nombre est **positif**, alors on **conserve** le sens de cette inégalité ;
- si ce nombre est **négatif**, alors on **inverse** le sens de cette inégalité.

EXEMPLES :
- Si $3x \leqslant 4$
$\frac{1}{3}$ est positif, l'ordre est **conservé**.
alors $3x \times \frac{1}{3} \leqslant 4 \times \frac{1}{3}$.
Donc : $x \leqslant \frac{4}{3}$.

- Si $-\frac{1}{5}x < 2$
-5 est négatif, l'ordre est **inversé**.
alors $-\frac{1}{5}x \times (-5) > 2 \times (-5)$.
Donc : $x > -10$.

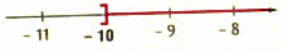
c) Représentation des solutions d'une inéquation

EXEMPLES :
- $x \leqslant \frac{4}{3}$



$\frac{4}{3}$ est solution, le crochet est tourné vers les solutions surlignées en rouge.

- $x > -10$



-10 n'est pas solution, le crochet n'est pas tourné vers les solutions surlignées en rouge.

2 Systèmes de deux équations à deux inconnues

a) Vocabulaire

DÉFINITION Une **équation à deux inconnues** est une égalité dans laquelle un couple de deux lettres désigne deux inconnues.
Une **solution** d'une équation à deux inconnues est un couple de nombres qui vérifie l'égalité.

EXEMPLE : $2x - 3y = -2$ est une équation dont le couple d'inconnues est $(x ; y)$.
Le couple $(5 ; 4)$ est une solution de cette équation car $2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$.
Le couple $(-1 ; 0)$ est aussi une solution de cette équation car $2 \times (-1) - 3 \times 0 = -2$.

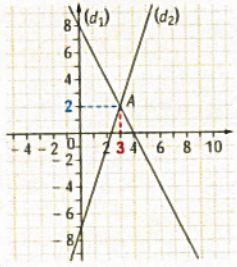
■ **Remarque :** Attention à l'ordre des nombres dans un couple !
Par exemple, le couple $(5 ; 4)$ est différent du couple $(4 ; 5)$.

DÉFINITION Lorsqu'un couple de nombres est solution **simultanément** de deux équations à deux inconnues, on dit que ce couple est une solution du **système** formé par ces deux équations.
Résoudre un système, c'est trouver tous les couples solutions du système.

EXEMPLE : $\begin{cases} 2x - 3y = -2 & (E_1) \\ -5x + 2y = -17 & (E_2) \end{cases}$ (S) est un système de deux équations à deux inconnues x et y.
Le couple $(5 ; 4)$ est solution des deux équations (E_1) et (E_2), donc il est solution du système (S).
Le couple $(-1 ; 0)$ est solution de l'équation (E_1), mais n'est pas solution de l'équation (E_2), donc il n'est pas solution du système (S).

b) Interprétation graphique

EXEMPLE : On considère le système (S) $\begin{cases} 2x + y = 8 & (E_1) \\ 3x - y = 7 & (E_2) \end{cases}$
- L'équation (E_1) peut s'écrire $y = -2x + 8$.
On trace la droite (d_1), représentation graphique de la fonction affine f_1 définie par $f_1(x) = -2x + 8$.
- L'équation (E_2) peut s'écrire $y = 3x - 7$.
On trace la droite (d_2), représentation graphique de la fonction affine f_2 définie par $f_2(x) = 3x - 7$.
- La solution du système correspond aux coordonnées du point A, point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).
Sur le graphique ci-contre, on lit $A(3 ; 2)$.
Vérification :
$2 \times 3 + 2 = 6 + 2 = 8$. Le couple $(3 ; 2)$ est solution de l'équation (E_1).
$3 \times 3 - 2 = 9 - 2 = 7$. Le couple $(3 ; 2)$ est solution de l'équation (E_2).



POINT DE REPÈRE
Dans le cas général, lorsque les deux droites sont sécantes, un système de deux équations à deux inconnues admet un seul couple solution.

COURS

3 Méthodes de résolution d'un système

a) Résolution du système par substitution d'une inconnue

EXEMPLE : On considère le système $(S)\begin{cases} 3x - y = -18 & (E_1) \\ 2x + 5y = 5 & (E_2) \end{cases}$.

• *Étape 1* : Choix d'une équation On choisit l'équation (E_1) car le coefficient devant l'inconnue y est -1. On exprime y en fonction de x dans l'équation (E_1).	$3x - 1 \times y = -18 \quad (E_1)$ D'après l'équation (E_1), on obtient : $3x + 18 = y$
• *Étape 2* : Substitution Dans l'autre équation, on remplace y par $3x + 18$. On obtient une nouvelle équation d'inconnue x.	$2x + 5y = 5 \quad (E_2)$ $2x + 5(3x + 18) = 5$
• *Étape 3* : Résolution de l'équation obtenue On résout cette équation pour obtenir la valeur de x.	$2x + 15x + 90 = 5$ $17x + 90 = 5$ $17x = -85$ $x = -5$
• *Étape 4* : Détermination de l'autre inconnue On remplace x par -5 dans l'expression $y = 3x + 18$ et on en déduit la valeur de y.	$y = 3 \times (-5) + 18$ $y = -15 + 18$ $y = 3$
• *Étape 5* : Vérification dans chaque équation (E_1) et (E_2)	$\begin{cases} 3 \times (-5) - 3 = -15 - 3 = -18 & (E_1) \\ 2 \times (-5) + 5 \times 3 = -10 + 15 = 5 & (E_2) \end{cases}$
• *Étape 6* : Conclusion La solution du système (S) est le couple $(-5 ; 3)$.	

b) Résolution du système par élimination d'une inconnue

EXEMPLE : On considère le système $(T)\begin{cases} 5x - 2y = -19 & (E_1) \\ -4x + 6y = 24 & (E_2) \end{cases}$.

• *Étape 1* : Choix des coefficients multiplicateurs pour obtenir des coefficients opposés de x ou de y On multiplie les deux membres de l'équation (E_1) par 3. On ne modifie pas l'équation (E_2).	$15x - 6y = -57 \quad 3 \times (E_1)$ $-4x + 6y = 24 \quad 1 \times (E_2)$ Les coefficients de y sont opposés.
• *Étape 2* : Élimination d'une inconnue On ajoute membre à membre les deux équations obtenues. Ceci permet d'éliminer l'inconnue y.	$15x - 6y = -57 \quad 3 \times (E_1)$ $+ \quad -4x + 6y = 24 \quad 1 \times (E_2)$ $11x + 0y = -33$
• *Étape 3* : Résolution de l'équation obtenue On résout cette équation pour obtenir la valeur de x.	$11x = -33$ $x = -3$
• *Étape 4* : Détermination de l'autre inconnue On remplace x par la valeur trouvée dans l'équation (E_1) ou dans l'équation (E_2).	$5 \times (-3) - 2y = -19 \quad (E_1)$ $-15 - 2y = -19$ $-2y = -4$ $y = 2$
• *Étape 5* : Vérification dans chaque équation (E_1) et (E_2)	$\begin{cases} 5 \times (-3) - 2 \times 2 = -15 - 4 = -19 \\ -4 \times (-3) + 6 \times 2 = 12 + 12 = 24 \end{cases}$
• *Étape 6* : Conclusion La solution du système (T) est le couple $(-3 ; 2)$.	

À L'ORAL

Inégalités et propriétés

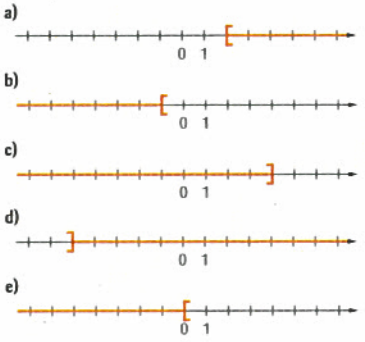
1 Dans chaque cas, proposer une inégalité qui traduit la phrase. Justifier la réponse.
a) Aujourd'hui, la température t n'atteindra pas 12°.
b) Ma prochaine note n en mathématiques doit être au moins égale à 14.
c) La masse m du véhicule ne doit pas être supérieure à 1,5 tonne pour franchir ce pont.

2 On a : $m < p$.
Dans chaque cas, comparer les deux expressions.
a) $m + 7$ et $p + 7$; **b)** $m - 19$ et $p - 19$;
c) $-m$ et $-p$; **d)** $\frac{m}{3}$ et $\frac{p}{3}$;
e) $2 - 3m$ et $2 - 3p$; **f)** $5m - 3$ et $5p - 3$.

3 Justifier chacune des affirmations suivantes en citant chaque propriété utilisée :
a) $a + 8 \leqslant -9$, donc $a \leqslant -17$;
b) $17b > 11$, donc $b > \frac{11}{17}$;
c) $-3c \geqslant 15$, donc $c \leqslant -5$;
d) $10 - d < 10$, donc $d > 0$.

Inéquations

4 Dans chaque cas, proposer une inéquation dont les solutions sont représentées en orange sur la droite graduée.



5 Parmi les nombres suivants, lesquels sont solutions de l'inéquation : $4x - 5 \geqslant 1 - 2x$?
a) 0 ; **b)** 2 ; **c)** -1 ; **d)** 1 ; **e)** $\frac{1}{2}$.

Pour les exercices 6 et 7, résoudre chacune des inéquations.

6 **a)** $x - 5 > 3$; **b)** $4x \leqslant 12$;
c) $\frac{1}{5}x > 10$; **d)** $-4x \geqslant 24$.

7 **a)** $2x + 3 > 7$; **b)** $\frac{3}{2}x < -3$;
c) $-x \geqslant -9$; **d)** $-4x + 1 \leqslant 1$.

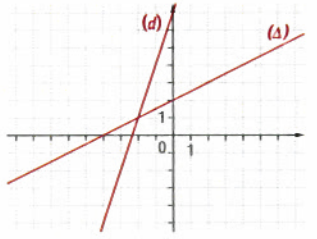
8 On considère l'équation $4x + 2y = 8$.
1) Trouver un couple solution.
2) Chacun des couples suivants est-il solution de cette équation ? Justifier la réponse.
a) $(3 ; -2)$; **b)** $(-2 ; 3)$; **c)** $(-1 ; -2)$;
d) $(-1 ; 6)$; **e)** $\left(\frac{1}{4} ; 3\right)$; **f)** $\left(\frac{1}{2} ; 3\right)$.

9 On considère l'équation $5x - 2y = 3$.
1) Calculer y lorsque $x = 3$.
2) Calculer x lorsque $y = 1$.

Équations à deux inconnues

10 On considère le système : $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$.
Pour chaque couple suivant, préciser s'il est solution de ce système :
a) $(3 ; 1)$; **b)** $(1 ; -2)$; **c)** $(-2 ; 1)$.

11 On considère le système (S) : $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 & (E_1) \\ y = 3x + 7 & (E_2) \end{cases}$.
On a représenté graphiquement ce système :



1) Quelle droite représente :
a) l'équation (E_1) ? **b)** l'équation (E_2) ?
Justifier chaque réponse.
2) Quelle est la solution du système (S) ?
Justifier la réponse.

SAVOIR FAIRE

1 J'apprends à... Résoudre une inéquation à une inconnue

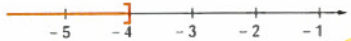
ÉNONCÉ 1) Résoudre l'inéquation $-3x + 4 \geqslant 16$.
2) Sur une droite graduée, représenter les solutions en orange.

SOLUTION

1) $-3x + 4 \geqslant 16$
$-3x + 4 - 4 \geqslant 16 - 4$
$-3x \geqslant 12$
$-3x \times \frac{-1}{3} \leqslant 12 \times \frac{-1}{3}$
$x \leqslant -4$

Les solutions de l'inéquation $-3x + 4 \geqslant 16$ sont tous les nombres inférieurs ou égaux à -4.

2)



J'utilise la même démarche que pour résoudre une équation.

$\frac{-1}{3} < 0$. J'ai multiplié par un nombre négatif, donc j'inverse le sens de l'inégalité.

-4 est solution de l'inéquation, le crochet est tourné vers les solutions en orange.

J'applique

● **Pour les exercices 12 à 14,** représenter en rouge, sur une droite graduée, les solutions de chaque inéquation.

12 a) $x \leqslant 2$; b) $x \geqslant 2$; c) $x < 2$; d) $x > 2$.

13 a) $x \geqslant -5$; b) $x < -3$; c) $x > 0$; d) $x \leqslant 10$.

14 a) $4 < x$; b) $-13 > x$; c) $-10 \geqslant x$; d) $x < \frac{1}{2}$.

15 Sur une droite graduée, représenter les solutions de chaque inéquation.

a) $x \leqslant \frac{2}{3}$;
b) $x > \frac{5}{3}$;
c) $x \geqslant -\frac{4}{3}$.

J'ai choisi une unité que j'ai pu partager finalement en 3.

16 Résoudre chaque inéquation et représenter ses solutions sur une droite graduée.

a) $x + 9 > 3$; b) $x - 4 \leqslant 1$; c) $3x < 21$; d) $2x \geqslant 10$; e) $-5x < -25$; f) $-x > 8$.

● **Pour les exercices 17 à 19,** résoudre chaque inéquation.

17 a) $\frac{4}{5}x \geqslant 16$; b) $\frac{-2}{3}x < 7$; c) $\frac{-7}{5}x > -14$; d) $\frac{9}{4} \leqslant \frac{-3}{8}x$.

18 a) $4 > x - 9$; b) $3 < 4 - x$; c) $2 \leqslant 1 - x$; d) $5 \leqslant x - 7$.

19 a) $3x + 4 < 16$; b) $-5x + 1 \geqslant 21$; c) $5 + 8x > -3$; d) $-7x - 3 \leqslant 11$.

20 On considère l'inéquation $4(x + 3) > 6x - 4$.
1) Parmi les nombres suivants, lesquels sont solutions de cette inéquation ? Justifier la réponse.
0 | -3 | 8 | 10 | -5
2) Résoudre cette inéquation et représenter ses solutions sur une droite graduée.
3) Sans faire de calcul, préciser si le nombre 9 876 est solution de cette inéquation.

21 Résoudre chaque inéquation et représenter ses solutions sur une droite graduée.

a) $\frac{4}{9}x + 5 > 29$; b) $-\frac{3}{2}x + 4 \leqslant -2$.

2 J'apprends à... Résoudre un système de deux équations

ÉNONCÉ Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$.

SOLUTION

Aucun coefficient n'est égal à -1 ou à 1, je résous ce système par élimination.

Comme la valeur de x est une fraction, j'ai cherché y sans utiliser cette valeur.

• Élimination de l'inconnue y

$\begin{cases} 3x - 4y = 5 & \times 1 \\ 5x + 2y = 1 & \times 2 \end{cases}$

On obtient :
$3x - 4y = 5$
$+ \ 10x + 4y = 2$
$13x + 0y = 7$

Ainsi $13x = 7$, donc $x = \frac{7}{13}$.

• Élimination de l'inconnue x

$\begin{cases} 3x - 4y = 5 & \times (-5) \\ 5x + 2y = 1 & \times 3 \end{cases}$

On obtient :
$-15x + 20y = -25$
$+ \ 15x + 6y = 3$
$0x + 26y = -22$

Ainsi $26y = -22$, donc $y = -\frac{22}{26}$, soit $y = -\frac{11}{13}$.

Vérification : $3 \times \frac{7}{13} - 4 \times \left(-\frac{11}{13}\right) = \frac{21}{13} + \frac{44}{13} = \frac{65}{13} = 5$ et $5 \times \frac{7}{13} + 2 \times \left(-\frac{11}{13}\right) = \frac{35}{13} + \frac{-22}{13} = \frac{13}{13} = 1$.

Conclusion : La solution du système $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ est le couple $\left(\frac{7}{13} ; -\frac{11}{13}\right)$.

J'applique

● **Pour les exercices 22 à 24,** résoudre chaque système par substitution d'une inconnue.

22 a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 5x + 4y = 18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - y = -33 \\ -3x + 5y = 37 \end{cases}$

23 a) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 7y = 5 \\ 3x - 2y = -19 \end{cases}$

24 a) $\begin{cases} x + y = 171 \\ x - y = 47 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -9a + 5b = 0 \\ 15a - b = 13 \end{cases}$

● **Pour les exercices 25 à 27,** résoudre chaque système par élimination d'une inconnue.

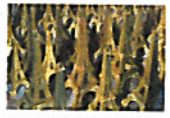
25 a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -6x + 7y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 5x + 4y = -3 \end{cases}$

26 a) $\begin{cases} -8x + 6y = 5 \\ 6x + 9y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x + 5y = 2 \\ 21x + 3y = 1 \end{cases}$

27 a) $\begin{cases} -11x + 10y = -2 \\ 10x - 11y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 13y = -1 \\ 5x + 7y = -4 \end{cases}$

28 Louis achète un DVD et deux CD pour un total de 26 €.
Paul achète cinq DVD et quatre CD pour un total de 88 €.
On note x le prix d'un DVD et y le prix d'un CD.
1) Écrire une équation qui traduit le prix payé par Louis, puis une seconde équation qui traduit le prix payé par Paul.
2) Résoudre le système formé par ces deux équations.
3) Donner le prix d'un DVD et le prix d'un CD.

29 En voyage scolaire à Paris, Thalia achète deux tours Eiffel et trois porte-clés pour 31 €.
Pour 50 €, Quirino achète cinq tours Eiffel et deux porte-clés.
• Déterminer le prix d'un porte-clés et le prix d'une tour Eiffel.



JE M'ENTRAÎNE

Propriétés des inégalités

Pour les exercices 30 et 31, a désigne un nombre relatif tel que $a < -4$.
Écrire une inégalité dont le premier membre est :

30 **a)** $a + 10$; **b)** $a - 8$; **c)** $-a$;
d) $3a$; **e)** $-2a$; **f)** $\frac{2}{3}a$.

31 **a)** $6 - a$; **b)** $20a - 1$; **c)** $-5a - \frac{1}{2}$.

Pour les exercices 32 et 33, dans chaque cas, déterminer une inégalité dont x est le premier membre.

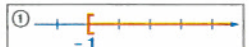
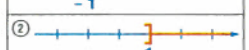
32 **a)** $5x \leqslant 8$; **b)** $-7 + x > 1$; **c)** $-9x < -27$;
d) $x - 4 \geqslant -4$; **e)** $\frac{4}{5} + x \leqslant 2$; **f)** $\frac{x}{7} > -11$.

33 **a)** $3x - 5 < 6$; **b)** $2 - 4x \geqslant 10$;
c) $5x + 6 \geqslant x$; **d)** $5x + 3 > 3x - 4$.

Représentation des solutions d'une inéquation

→ Voir Savoir faire 1, p. 106

34 Associer chaque inéquation à la représentation graphique de ses solutions surlignées en orange.

ⓐ $x \leqslant 1$	① 
ⓑ $x > 1$	② 
ⓒ $x \geqslant -1$	③
ⓓ $x < -1$	④

35 Dans chaque cas, tracer une droite graduée et représenter en rouge l'ensemble des nombres :
a) inférieurs ou égaux à 5 ;
b) strictement supérieurs à -4 ;
c) strictement inférieurs à 1 ;
d) supérieurs ou égaux à 0.

36 Dans chaque cas, écrire une inégalité dont les solutions sont représentées en orange.

a)

b)

Résolution d'une inéquation

→ Voir Savoir faire 1, p. 106

Pour les exercices 37 à 39, résoudre chaque inéquation et représenter ses solutions sur une droite graduée.

37 **a)** $5x + 1 < 11$; **b)** $3x - 8 \geqslant 8x + 7$;
c) $7x + 3 \geqslant 5x - 8$; **d)** $4x + 1 > 5x + 2$.

38 **a)** $-7x + 1 < 1$; **b)** $8 - 3x > 0$;
c) $6 - 9x \leqslant 9x$; **d)** $-4 - 5x \geqslant 1$.

39 **a)** $3(x + 2) \leqslant 5x - 1$;
b) $7 + 2(3 - x) > 4(x - 5)$.

40 n désigne un nombre entier positif.
1) Résoudre l'inéquation : $2n + 3 > 2(2n - 1)$.

J'ai trouvé 3 nombres entiers positifs solutions.

2) Résoudre l'inéquation $-3(2n + 1) \geqslant -20 - 3n$.

41 Rocco choisit un nombre entier positif. Il ajoute 5 à ce nombre et calcule le double du résultat obtenu. Vincenzo ajoute 2 au triple du nombre initialement choisi par Rocco. Le résultat qu'il obtient est inférieur à celui obtenu par Rocco.
1) Écrire une inéquation qui traduit la situation.
2) En déduire tous les nombres que Rocco a pu choisir.

42 Le périmètre d'un rectangle de longueur 9,3 cm est inférieur ou égal à 31 cm.
• Déterminer les valeurs possibles de la largeur de ce rectangle.

43 Un camion, dont la masse à vide est de 7 tonnes, transporte des caisses de 40 kg chacune. Pour respecter la réglementation, la masse totale du camion ne doit pas excéder 12 tonnes.
On note n le nombre de caisses chargées.
1) Écrire une inéquation vérifiée par le nombre n.
2) Résoudre cette inéquation.
3) En déduire le nombre maximal de caisses qui peuvent être chargées sur ce camion.

Résolution d'un système

→ Voir Savoir faire 2, p. 107

44 On considère le système $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$.
• Parmi les couples suivants, lequel est solution de ce système ? Justifier la réponse.
$(1 ; 1)$ | $(0,5 ; 3)$ | $(1 ; -2)$ | $(2 ; -3)$

Pour les exercices 45 à 47, résoudre par la méthode la plus judicieuse chacun des systèmes.

45 **a)** $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 7y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

46 **a)** $\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ x + 7y = 12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$

47 **a)** $\begin{cases} 5x + 3y = 9 \\ x - 9y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 3y = 2 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases}$

48 La somme de deux nombres est égale à 83 et la différence de ces deux nombres est égale à 19.
• Déterminer ces deux nombres.

49 Un groupe de 31 personnes va dans un centre nautique. Certaines choisissent de faire de la planche à voile, les autres de l'optimiste.

Les tarifs de location sont : 15 € par planche à voile et 20 € par optimiste.
Le groupe paie une facture totale de 525 €.
• Déterminer le nombre de personnes de ce groupe ayant loué une planche à voile et le nombre de personnes ayant loué un optimiste.

50 On remplit 14 pots avec exactement 6 kg de confiture.
Certains pots ont une contenance de 500 g et d'autres une contenance de 375 g.
On note x le nombre de pots de 500 g remplis et y le nombre de pots de 375 g remplis.
1) Justifier que le problème se traduit par ce système :

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 3y = 48 \end{cases}$$

2) Résoudre ce système.
3) En déduire le nombre de pots de chaque sorte utilisés.

51 f est la fonction affine telle que $f(2) = 4$ et $f(-1) = -5$.
On note $f : x \mapsto ax + b$.
1) Justifier que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ -a + b = -5 \end{cases}$.
2) En déduire l'expression algébrique de $f(x)$.

52 Déterminer la fonction affine g telle que :
$g(2) = -8$ et $g(-3) = 17$

Interprétation graphique d'un système

53 On considère le système :

$$(S) \begin{cases} x + y = 3 & (E_1) \\ 3x - y = 5 & (E_2) \end{cases}$$

1) **a)** Justifier que l'équation (E_1) peut s'écrire :
$y = -x + 3$
b) Justifier que l'équation (E_2) peut s'écrire :
$y = 3x - 5$
2) **a)** Dans un repère, tracer la droite (d_1), représentation graphique de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -x + 3$.
b) Dans le même repère, tracer la droite (d_2), représentation graphique de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = 3x - 5$.
3) **a)** Déterminer graphiquement le couple solution du système (S).
b) Vérifier par un calcul que ce couple est la solution exacte du système (S).

54 On considère le système :

$$(Z) \begin{cases} 2x + y = 15 & (E_1) \\ -3x + 2y = 5 & (E_2) \end{cases}$$

1) **a)** Justifier que l'équation (E_1) peut s'écrire :
$y = -2x + 15$
b) Justifier que l'équation (E_2) peut s'écrire :
$y = 1,5x + 2,5$
2) **a)** Dans un repère, tracer la droite (d_1), représentation graphique de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -2x + 15$.
b) Dans le même repère, tracer la droite (d_2), représentation graphique de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = 1,5x + 2,5$.
3) **a)** Déterminer graphiquement le couple solution du système (Z).
b) Vérifier, par un calcul, que ce couple n'est pas la solution exacte du système (Z).

J'APPROFONDIS

55 **1) a)** Résoudre l'inéquation $-8 + 5x < 3x - 4$.
b) Sur une droite graduée, hachurer l'ensemble des nombres qui ne sont pas solutions de cette inéquation.
2) a) Résoudre l'inéquation $19 + 7x \geqslant -2 + 4x$.
b) Sur la droite graduée de la question **1)**, hachurer l'ensemble des nombres qui ne sont pas solutions de cette inéquation.
3) a) Repasser en rouge la partie de droite qui représente les nombres qui sont simultanément solutions des deux inéquations.
b) Écrire un encadrement qui correspond à l'ensemble des nombres représentés en rouge.

56 Résoudre chaque inéquation et représenter les solutions sur une droite graduée.

a) $\frac{x-4}{5} < 2$; **b)** $5(x-7) < 3(5+3x)$;

c) $\frac{1}{5}x - 1 > \frac{2}{5}x + 3$; **d)** $\frac{1}{4}x + \frac{3}{5} \geqslant \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$.

57 On considère cette équation à deux inconnues :

$$3x - 2y = 7$$

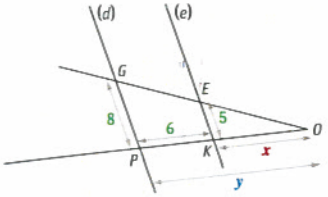
- Donner cinq couples solutions de cette équation.

58 **1)** Écrire un système de deux équations distinctes à deux inconnues dont le couple $(5 ; -2)$ est une solution.
2) Reprendre la question **1)** pour le couple $\left(\frac{3}{2} ; \frac{5}{7}\right)$.

59 On considère le système (S) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -3x + 7y = 1 \end{cases}$.
1) Résoudre le système (S).
2) On veut résoudre le système $\begin{cases} 2a^2 - 3b^2 = 6 \\ -3a^2 + 7b^2 = 1 \end{cases}$.
a) En utilisant le résultat de la question **1)**, préciser les valeurs de a^2 et b^2. Justifier la réponse.
b) En déduire toutes les solutions du système.

60 Karl est content. Lors des soldes, il a pu acheter un pull bénéficiant d'une remise de 15 % et un blouson sur lequel la remise était de 20 %.
Au total, il a payé ces deux articles 103,50 €.
En dehors des soldes, il aurait payé 22,50 € de plus.
- Quels étaient le prix du pull et le prix du blouson avant les soldes ?

61 Sur la figure ci-dessous, les droites (d) et (e) sont parallèles.
Les points O, E et G sont alignés.
Les points O, K et P sont alignés.



1) Justifier que les nombres x et y sont solutions du système $\begin{cases} y - x = 6 \\ 8x - 5y = 0 \end{cases}$.
2) a) Résoudre ce système.
b) En déduire la longueur OP.

62 La somme de deux nombres relatifs est égale à 7.
La différence entre les carrés de ces deux nombres est égale à 161.
- Déterminer ces deux nombres.

63 Un rectangle a pour périmètre 80 m.
On augmente sa longueur de 7 m et sa largeur de 5 m.
On constate alors que l'aire du rectangle a augmenté de 269 m².
- Déterminer les dimensions initiales du rectangle.

64 Dans un club de salsa, il y a 25 femmes et 16 hommes.
- Combien de couples de nouveaux danseurs devraient s'inscrire en plus pour que le nombre d'hommes soit au moins égal aux trois quarts du nombre de femmes ?

Problème de synthèse

Connaissances mises en œuvre : Volumes (*Révisions*), Inéquations - Systèmes d'équations (*Chapitre 6*), Fonctions affines (*Chapitre 9*).

65 Un producteur de café veut expédier par petits containers une partie de sa récolte.
On distingue deux variétés de graines différentes :
- l'*Albina* conditionnée en sacs de 40 kg, chaque sac ayant un volume de 200 dm³ ;
- la *Kamaro*, plus dense, conditionnée en sacs de 50 kg, chaque sac ayant un volume de 100 dm³.

On désigne par x le nombre de sacs d'*Albina* et par y le nombre de sacs de *Kamaro* qui sont chargés dans le container.

Partie A Contraintes de volume

Chaque container a un volume de 1 mètre cube.
1) Combien peut-on charger dans ce container :
a) de sacs d'*Albina* ? **b)** de sacs de *Kamaro* ?
Justifier chaque réponse.
2) Écrire une inégalité vérifiée par les nombres x et y.
3) Déterminer le nombre de sacs de *Kamaro* que l'on peut charger dans un container qui contient déjà 2 sacs d'*Albina*.

Partie B Contraintes de masse

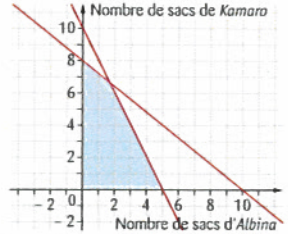
Chaque container ne peut pas supporter une charge de plus de 400 kg.
1) Combien peut-on charger dans ce container :
a) de sacs d'*Albina* ? **b)** de sacs de *Kamaro* ?
Justifier chaque réponse.
2) Écrire une inégalité vérifiée par les nombres x et y.
3) Déterminer le nombre de sacs de *Kamaro* que l'on peut charger dans un container qui contient déjà 2 sacs d'*Albina*.

Partie C Contraintes de volume et de masse

On suppose qu'il existe un chargement « idéal » du container de volume 1 m³ et de masse 400 kg.
1) Justifier que le couple $(x ; y)$ est alors solution du système (S) : $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases}$.
2) Résoudre ce système.
3) Commenter cette solution.

Partie D Prix de vente

Le graphique ci-dessous représente le système (S).
On admet que les couples de nombres entiers appartenant à la zone bleue répondent aux contraintes de volume et de masse du container.



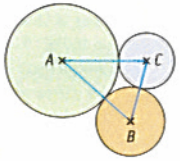
1) Lire graphiquement le nombre maximal de sacs de *Kamaro* que l'on peut charger avec un sac d'*Albina*.
2) Le sac de *Kamaro* est vendu 300 € et celui d'*Albina* 350 €.
Déterminer la composition du chargement donnant la meilleure vente.

Je cherche

66 a, b, c et d désignent quatre nombres relatifs.
On sait que : $a < b$ et $c < d$.
- Démontrer que : $a + c < b + d$.

67 Si Simon donne 3 € à Garfunkel, alors ils ont autant d'argent.
Si Garfunkel donne 5 € à Simon, alors Simon a deux fois plus d'argent que Garfunkel.
- Combien chacun d'eux a-t-il d'argent ?

68 Sur la figure ci-dessous, les cercles de centres A, B et C sont tangents deux à deux.
On a :
$AB = 10$ cm ;
$AC = 7$ cm ;
$BC = 6$ cm.



1) Déterminer le rayon de chacun des trois cercles.
2) Construire la figure.

JE TRAVAILLE EN AUTONOMIE

Pour débuter

69 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x + 7 < -8$; **b)** $5x \geqslant 30$;

c) $-4x > 16$; **d)** $3x - 1 < 8$.

70 **1)** Résoudre l'inéquation $5x - 7 < 8x - 13$.

2) Sur une droite graduée, représenter en rouge les solutions de cette inéquation.

71 Résoudre chacun des systèmes ci-dessous en choisissant la méthode la plus judicieuse.

a) $\begin{cases} x + 5y = 17 \\ 3x + 2y = 25 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 7y = 13 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

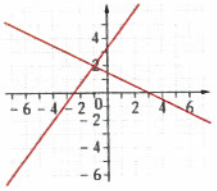
72 Déterminer lequel des trois systèmes est représenté graphiquement ci-dessous.

Justifier la réponse.

① $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = -1 \end{cases}$

② $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - 3y = -10 \end{cases}$



Pour se perfectionner

73 **JE RÉDIGE**

Un groupe de 27 personnes a payé 300 € l'entrée dans un parc d'attractions.

Il y a deux tarifs d'entrée : 10 € et 15 €.

On désigne par x le nombre d'entrées à 10 € et par y le nombre d'entrées à 15 €.

1) a) Écrire un système qui traduit cet énoncé.

b) Résoudre ce système et en déduire le nombre d'entrées pour chacun des deux tarifs.

2) Le tarif de 15 € est le tarif normal et le tarif à 10 € est accordé aux clients ayant acheté une carte *club* au prix de 42 €.

On veut déterminer le nombre n d'entrées à partir duquel il est plus avantageux d'avoir la carte *club*.

a) Écrire une inéquation vérifiée par le nombre n.

b) Résoudre cette inéquation.

c) Déterminer la valeur de n à partir de laquelle il est intéressant de prendre la carte *club*.

Solution rédigée : voir Site élève

74 On considère la fonction affine f telle que :

$f(3) = 1$ et $f(1) = 7$

- Déterminer cette fonction f.

→voir indications, page 301

Devoir à la maison

75 On considère l'inéquation : $3(x - 4) \leqslant 6x + 5$.

1) Parmi les nombres suivants, lesquels sont solutions de cette inéquation ? Justifier chaque réponse.

$3 \mid 0 \mid -12 \mid -4$

2) Résoudre cette inéquation et représenter en rouge ses solutions sur une droite graduée.

76 Une crèche propose deux tarifs différents :

- le tarif *Tchoupi* à 20 € par jour ;
- le tarif *Popi* à 15 € par jour avec une adhésion préalable de 100 €.

On veut savoir à partir de combien de jours le tarif *Popi* est plus intéressant que le tarif *Tchoupi*.

x désigne le nombre de jours de garde d'un enfant.

1) Écrire une inéquation qui traduit ce problème.

2) Résoudre cette inéquation, puis conclure.

77 a et b désignent deux nombres tels que $a > 3$ et $b > 7$. L'unité de longueur est le mètre.

On considère un rectangle bleu de largeur a et de longueur b.

1) On augmente la largeur du rectangle bleu de 4 m et on diminue sa longueur de 7 m.

L'aire du rectangle reste la même.

Écrire une égalité (E_1) qui traduit cette affirmation.

2) On diminue la largeur du rectangle bleu de 3 m et on augmente sa longueur de 9 m.

Là encore, l'aire du rectangle reste la même.

Écrire une égalité (E_2) qui traduit cette affirmation.

3) Résoudre le système formé par les deux équations (E_1) et (E_2).

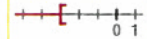
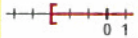
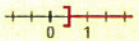
4) En déduire les dimensions et l'aire du rectangle bleu.

JE FAIS LE POINT

J'ai appris à...

- Résoudre une inéquation du premier degré.
- Représenter les solutions d'une inéquation sur une droite graduée.
- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues.
- Interpréter graphiquement un système de deux équations à deux inconnues.

Attention : Il peut y avoir plusieurs réponses exactes pour chaque énoncé ! Les trouver toutes.

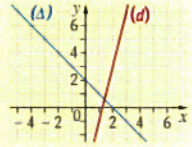
	A	B	C	Si échec, revoir :
78 Si $3x - 6 > 9$, alors on a :	$3x > 15$	$3x > 3$	$x - 2 > 3$	p. 106
79 Le nombre x est tel que $8 - 2x \leqslant 20$. Donc :	$x \leqslant 14$	$x \leqslant -6$	$x \geqslant -6$	p. 106
80 Le nombre x est tel que $5(3 - x) < x - 15$. Donc :	$x > 5$	$5 < x$	$x < 5$	p. 106
81 Les nombres x tels que $x \leqslant -3$ sont représentés en rouge par :				p. 102 p. 106
82  Les nombres x représentés en rouge ci-dessus sont tels que :	$x > 1$	$x \geqslant \frac{1}{2}$	$x > 0{,}5$	p. 102 p. 106
83 Le couple $(3 ; -2)$ est solution du système :	$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ -3x + y = -11 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$	p. 103
84 (S) $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$ La solution du système (S)	est le couple $(6 ; -3)$	est le couple $(-0{,}8 ; -0{,}6)$	est le couple $(-0{,}6 ; -0{,}8)$	p. 103 p. 107
85 (S) $\begin{cases} 2x - 3y = -11 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$ Le système (S) admet pour solution un couple de nombres	entiers	de signes contraires	de même signe	p. 104 p. 107

Pour les exercices 86 et 87, on considère le système :

(S) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

On a tracé ci-contre :

- la droite (d), représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 4x - 5$;
- la droite (Δ), représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = 2 - x$.



86 Le couple $(a ; b)$ est solution du système (S). Par lecture graphique, on peut affirmer que :	$a \approx 1{,}3$ et $b \approx 0{,}7$	$1 < a < 2$ et $0 < b < 1$	$0 < a < 1$ et $1 < b < 2$	p. 103
87 Le système (S) a pour solution le couple :	$(1{,}3 ; 0{,}7)$	$(0{,}75 ; 1{,}25)$	$\left(\frac{7}{5} ; \frac{3}{5}\right)$	p. 107

→corrigés : voir page 307