

74 Soit : $E = (4x - 1)^2 - (4x - 1)(x + 5)$.

a. Montrer que E peut s'écrire :

$$3(4x - 1)(x - 2) .$$

b. Calculer E pour $x = 0$, puis pour $x = 2$.

a. La réponse proposée en a. est une forme factorisée. Il faut donc factoriser E .

Le facteur commun est $(4x - 1)$

$$\begin{aligned} E &= (4x - 1)(4x - 1) - (4x - 1)(x + 5) \\ &= (4x - 1)((4x - 1) - (x + 5)) \\ &= (4x - 1)(4x - 1 - x - 5) \\ &= (4x - 1)(3x - 6) = 3(4x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Rem concernant $(3x - 6)$: ici, on peut

factoriser le facteur commun « 3 »

b. Pour calculer E , il vaut mieux utiliser l'expression factorisée que la développée :

$$\begin{aligned} E_0 &= 3(4x - 1)(x - 2) = 3(4 \cdot 0 - 1)(0 - 2) \\ &= 3 \cdot (-1)(-2) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= 3(4x - 1)(x - 2) = 3(4 \cdot 2 - 1)(2 - 2) \\ &= 3 \cdot (7)(0) = 0 \end{aligned}$$

Dans ce 2^{ème} exercice, il suffit de voir que la 2^{ème} parenthèse donne « 0 » pour savoir que la réponse sera « 0 » !

75 Soit : $F = (3x - 1)^2 - 36$.

a. Calculer la valeur de F pour $x = 0$.

b. Calculer la valeur de F pour $x = \frac{7}{3}$.

c. Factoriser F .

$$\begin{aligned} F_0 &= (3 \cdot 0 - 1)^2 - 36 = (0 - 1)^2 - 36 \\ a. &= (-1)^2 - 36 = 1 - 36 = -35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{7/3} &= \left(3 \cdot \frac{7}{3} - 1\right)^2 - 36 = (7 - 1)^2 - 36 \\ b. &= (6)^2 - 36 = 36 - 36 = 0 \end{aligned}$$

c. Pour factoriser F , il faut voir qu'on a ici la 3^{ème} identité remarquable, $a^2 - b^2$:

$$(3x - 1)^2 \text{ représente } a^2 \text{ et } 3x - 1 \equiv a$$

$$36 \text{ représente } b^2 \text{ et } 6 \equiv b$$

Remplaçons a par $3x - 1$ et remplaçons b par 6 :

Ainsi, $(a + b)(a - b)$ devient :

$$\begin{aligned} F &= (3x - 1 + 6)(3x - 1 - 6) \\ &= (3x + 5)(3x - 7) \end{aligned}$$

76 Soit : $G = (3x - 2)^2 - (2x + 1)(3x - 2)$.

a. Développer et réduire G .

b. Factoriser G .

c. Calculer G pour $x = 3$.

$$\begin{aligned} \text{76 a. } G &= 9x^2 - 12x + 4 - (6x^2 - x - 2) \\ &= 3x^2 - 11x + 6 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } G &= (3x - 2)[3x - 2 - (2x + 1)] \\ &= (3x - 2)(x - 3) . \end{aligned}$$

c. L'expression factorisée est l'écriture de G la mieux adaptée.

$$\text{Pour } x = 3, G = (3 \times 3 - 2)(3 - 3) = 0 .$$

77 Soit : $H = (x - 3)(2x + 5) + x^2 - 9$.

a. Développer et réduire H .

b. Factoriser $x^2 - 9$, puis factoriser H .

c. Calculer H pour $x = -3$, puis pour $x = 3$.

$$\begin{aligned} \text{77 a. } H &= 2x^2 + 5x - 6x - 15 + x^2 - 9 \\ &= 3x^2 - x - 24 . \end{aligned}$$

$$\text{b. } x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) ;$$

$$\begin{aligned} H &= (x - 3)(2x + 5 + x + 3) \\ &= (x - 3)(3x + 8) . \end{aligned}$$

c. • Pour $x = -3$, choisir soit l'écriture développée, soit l'écriture factorisée.

$$H = 3(-3)^2 - (-3) - 24 = 6 .$$

• Pour $x = 3$, choisir l'écriture factorisée.

$$H = (3 - 3)(3 \times 3 + 8) = 0 .$$

78 **Où est l'astuce ?**

1. Développer et réduire $E = (x-1)^2 + 4x$.
2. En déduire une factorisation en E .
3. Sans effectuer les calculs, justifier les égalités :
 $49^2 + 200 = 51^2$;
 $99^2 + 400 = 101^2$.
4. Compléter l'égalité suivante (même type qu'au 3.) :
 $199^2 + \dots = \dots^2$.

$$1. \quad E = (x-1)^2 + 4x = x^2 - 2x + 1 + 4x \\ = x^2 + 2x + 1$$

2. Ceci est la 1^{ère} identité remarquable, donc :

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

3. Pour le 1^{er} exemple : $49^2 + 200 = 51^2$,
posons $x = 50$
Ainsi,
- 49 devient $x - 1$,
- $200 = (4 \cdot 50)$ et devient $4x$ et
- 51 devient $x + 1$

Et on peut poser :

$$E = (x-1)^2 + 4x = (50-1)^2 + 4 \cdot 50 \\ = (50+1)^2 = (x+1)^2$$

Pour le 2^{ème} exemple : $99^2 + 400 = 101^2$,
posons $x = 100$

Et on peut poser :

$$E = (x-1)^2 + 4x = (100-1)^2 + 4 \cdot 100 \\ = (100+1)^2 = (x+1)^2$$

4. Pour cet exemple, posons $x = 200$
 $99^2 + 400 = 101^2$

Et on peut poser :

$$E = (x-1)^2 + 4x = (200-1)^2 + 4 \cdot 200 \\ = 199^2 + 800 = 201^2$$

79 **Tout s'explique !**

1. Calculer :

$$A = 71 \times 69 - 72 \times 68 ; \\ B = 261 \times 259 - 262 \times 258 ; \\ C = 1\,431 \times 1\,429 - 1\,432 \times 1\,428 .$$

Que remarque-t-on ?

2. Comment expliquer ce curieux résultat ?

Conseil : appeler $(x+1)$ le premier nombre de chaque expression.

$$79 \quad * 1. A = B = C = 3 .$$

$$2. (x+1)(x-1) - (x+2)(x-2) \\ = x^2 - 1 - (x^2 - 4) = 3 .$$

Suggestion

On peut prolonger cet exercice en posant la question suivante :

« Compléter les deux calculs ci-dessous afin d'obtenir toujours le même résultats :

$$D = 151 \times \dots - \dots \times \dots \\ E = \dots \times \dots - \dots \times 2\,178 . »$$

Réponse

$$D = 151 \times 149 - 152 \times 148 ; \\ E = 2\,181 \times 2\,179 - 2\,182 \times 2\,178 .$$

80 **Curiosité**

1. Vérifier les égalités suivantes :

$$5^2 - 4^2 = 5 + 4 ; \\ 12^2 - 11^2 = 12 + 11 ; \\ 38^2 - 37^2 = 38 + 37 .$$

2. Compléter la conjecture suivante :

La différence des carrés de deux nombres ... est égale à la ... de ces deux nombres.

3. Démontrer ce résultat général.

$$80 \quad * 1. 5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9 ; \\ 12^2 - 11^2 = 12 + 11 = 23 ; \\ 38^2 - 37^2 = 38 + 37 = 75 ; \\ 124^2 - 123^2 = 124 + 123 = 247 .$$

2. La différence des carrés de deux nombres **entiers consécutifs** est égale à la **somme** de ces deux nombres.

$$3. x^2 - (x-1)^2 = [x + (x-1)][x - (x-1)] \\ = x + (x-1) ;$$

x et $x-1$ sont bien les notations de deux entiers consécutifs si x désigne un entier.

Suggestion

On peut prolonger cet exercice en posant la question suivante :

« Compléter et vérifier l'égalité du même type :

$$5\,678^2 - \dots = \dots + \dots . »$$

Réponse

$$5\,678^2 - 5\,677^2 = 5\,678 + 5\,677 = 11\,355 .$$

93 Extraits du brevet **Grenoble 2000 et 2002****Exercice 1**

On considère l'expression : $D = (3x - 5)^2 - 16$.

1. Développer D .
2. Factoriser D .
3. Calculer D pour $x = \frac{1}{3}$.

Exercice 2

On considère l'expression :

$$A = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 2).$$

1. Développer et réduire A .
2. Factoriser A .
3. Calculer A pour $x = 2$.

Exercice 1

1. $D = (3x - 5)^2 - 16 = 9x^2 - 30x + 25 - 16$
 $= 9x^2 - 30x + 9$
2. On pourrait factoriser l'expression de la réponse précédente de la façon suivante :

$$9x^2 - 30x + 9 = 3(3x^2 - 10x + 3),$$

Mais, dans la mesure du possible, il faut toujours factoriser dans l'idée d'obtenir des facteurs du 1^{er} degré.

Ainsi, reprenons l'expression de départ : on s'aperçoit qu'on a ici la 3^{ème} identité :

$$D = (3x - 5)^2 - 16 \text{ correspond à } a^2 - b^2$$

Remplaçons a par $3x - 5$ et remplaçons b par 4 :

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } (a + b)(a - b) \text{ devient :} \\ (3x - 5 + 4)(3x - 5 - 4) &= (3x - 1)(3x - 9) \\ &= 3 \cdot (3x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

3. Pour $x = \frac{1}{3}$, prenons l'expression

factorisée

$$3 \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = 3 \left(\frac{3}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = 0$$

la 1^{ère} parenthèse est égale à 0. Il est donc inutile de développer plus le calcul.

Exercice 2

$$A = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 2)$$

1. $= 4x^2 - 12x + 9 - (2x^2 - 4x - 3x + 6)$
 $= 4x^2 - 12x + 9 - 2x^2 + 7x - 6 = 2x^2 - 5x + 3$
2. Pour factoriser A , il faut reprendre l'expression de départ et voir que le facteur commun est $(2x - 3)$:

$$\begin{aligned} A &= (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 2) \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - (x - 2)) \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - x + 2) \\ &= (2x - 3)(x - 1) \end{aligned}$$

3. Pour calculer A avec $x = 2$, on peut prendre soit l'expression développée, soit l'expression factorisée, toutes les 2 étant simples (mais inutile de faire les 2).

$$1. 2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 8 - 10 + 3 = 1$$

$$2. (2x - 3)(x - 1) = (2 \cdot 2 - 3)(2 - 1) = 1 \cdot 1 = 1$$

94 Extrait du brevet **Poitiers 1998**

1. Factoriser :

$$\text{a. } 9 - 12x + 4x^2 ; \quad \text{b. } (3 - 2x)^2 - 4.$$

2. En déduire une factorisation de

$$E = (9 - 12x + 4x^2) - 4.$$

3. Montrer que, pour $x = \frac{3}{2}$, E est un entier.

- 1.a Pour factoriser cette expression, il faut reconnaître la 2^{ème} identité remarquable.

$$9 \text{ représente } a^2 \text{ donc } 3 \equiv a$$

$$4x^2 \text{ représente } b^2 \text{ et } 2x \equiv b$$

$$\text{Le terme du milieu est bien : } 2 \cdot 3 \cdot 2x = 12x$$

$$\text{Ainsi : } 9 - 12x + 4x^2 = (3 - 2x)^2$$

- 1.b Pour factoriser cette expression, il faut reconnaître la 3^{ème} identité remarquable.

$$(3-2x)^2 \text{ représente } a^2 \text{ donc } 3-2x \equiv a$$

$$4 \text{ représente } b^2 \text{ et } 2 \equiv b$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(3-2x)^2 - 4 &= (3-2x+2)(3-2x-2) \\ &= (5-2x)(1-2x)\end{aligned}$$

2. Dans E , remplaçons $(9-12x+4x^2)$ par sa factorisation $(3-2x)^2$.

$$\text{Ainsi } E = (3-2x)^2 - 4$$

Et nous reconnaissons là la 3^{ème} identité remarquable :

$$E = (3-2x+2)(3-2x-2) = (5-2x)(1-2x)$$

3. Avec $x = 3/2$, choisissons l'expression factorisée pour calculer la valeur de E :

$$\begin{aligned}E &= \left(5-2 \cdot \frac{3}{2}\right) \left(1-2 \cdot \frac{3}{2}\right) = (5-3)(1-3) \\ &= 2 \cdot (-2) = -4\end{aligned}$$

95 Extrait du brevet Amiens 1997

- Développer et réduire : $D = (a+5)^2 - (a-5)^2$.
- Sans utiliser la calculatrice et en se servant de la question 1., trouver la valeur de $10\,005^2 - 9\,995^2$.
(Indiquer les étapes de calcul.)

95 1. $D = a^2 + 10a + 25 - (a^2 - 10a + 25) = 20a$.

2. Établir le lien avec le 1. en posant $a = 10\,000$.
 $(10\,000 + 5)^2 - (10\,000 - 5)^2 = 20 \times 10\,000 = 200\,000$.

96 Extrait du brevet Bordeaux 2002

1. Développer et réduire l'expression :

$$P = (x+12)(x+2).$$

2. Factoriser l'expression : $Q = (x+7)^2 - 25$.

3. ABC est un triangle rectangle en A : x désigne un nombre positif : $BC = x+7$; $AB = 5$.

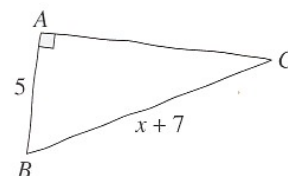
Faire un schéma et montrer que :

$$AC^2 = x^2 + 14x + 24.$$

96 1. $P = x^2 + 14x + 24$.

2. $Q = (x+12)(x+2)$.

3.



Le triangle ABC étant rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = (x+7)^2 - 5^2$$

$$AC^2 = Q, \text{ or } Q = P, \text{ donc } AC^2 = P.$$

D'après le 1., $P = x^2 + 14x + 24$, donc :

$$AC^2 = x^2 + 14x + 24.$$