

REVOIR

- le calcul d'une expression littérale en donnant des valeurs aux variables ;
- la propriété de distributivité : développement et factorisation ;
- comment réduire une expression littérale.

DÉCOUVRIR

- la suppression des parenthèses précédées d'un signe + ou d'un signe - dans une expression littérale ;
- le développement du produit $(a + b)(c + d)$.

SOCLE COMMUN

- SC Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.



Sur cette image, Héron d'Alexandrie présente la première machine à vapeur qu'il a inventée.

Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle après J.-C.) était un mathématicien et ingénieur grec.

Il conçut de nombreuses machines et automates dont l'*éolipyle* (voir image ci-dessus).

Cette machine était constituée d'une sphère creuse fixée à un axe et dotée de deux tubes coudés.

On chauffait l'eau contenue dans un récipient disposé en dessous et la vapeur d'eau dégagée faisait tourner la sphère.

En géométrie, la formule de Héron permet de calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle :

$$\mathcal{A}^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

avec $p = \frac{a + b + c}{2}$ et a, b, c sont les longueurs des côtés du triangle.

- Déterminer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle de longueurs de côtés 5 cm, 6 cm et 7 cm.

1 Je supprime des parenthèses précédées d'un signe +

x désignant un nombre relatif, on considère l'expression littérale $A = 3x + (-7 + 2x)$.

- a) Qu'indiquent les parenthèses rouges de cette expression littérale ?
 - b) Quelle propriété de l'addition permet de justifier que $A = 3x + (-7) + 2x$?
 - c) Pourquoi peut-on alors écrire que $A = 3x - 7 + 2x$?
 - d) Finalement, dans le cas d'une somme, les parenthèses rouges sont-elles utiles ?
- a) Quelle autre propriété de l'addition permet ensuite de justifier que $A = 3x + 2x - 7$?
 - b) Quelle propriété permet enfin de justifier que $A = 5x - 7$?

2 Je supprime des parenthèses précédées d'un signe -

A Conjecture

1 Recopier et compléter le tableau ci-contre.

2 À quelle autre expression littérale semble être égale l'expression $a - (b + c)$?

a	b	c	$a - (b + c)$	$a - b + c$	$a - b - c$	$a + b - c$
8	5	2				
4	6	5				
-2	5	-3				
5	-4	1				

B Démonstration

a, b et c désignent des nombres relatifs.

- Recopier la démonstration ci-contre.
- Justifier chacune des égalités ①, ② et ③.

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a + (-1) \times (b + c) & \text{①} \\ a - (b + c) &= a + (-1) \times b + (-1) \times c & \text{②} \\ a - (b + c) &= a - b - c & \text{③} \end{aligned}$$

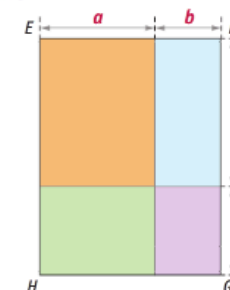
3 Je démontre la règle de double distributivité

A Démonstration géométrique pour des nombres positifs

Les nombres positifs a, b, c et d désignent des longueurs.

Le rectangle $EFGH$ ci-contre est constitué de 4 rectangles colorés.

- a) Exprimer en fonction des nombres a, b, c et d l'aire de chacun des rectangles colorés.
- b) En déduire une expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle $EFGH$.
- c) Exprimer en fonction de a, b, c et d chacune des longueurs EF et FG . En déduire une nouvelle expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle $EFGH$.
- d) Recopier et compléter : $(a + b)(c + d) = \dots + \dots + \dots + \dots$.



B Démonstration algébrique pour des nombres relatifs

a, b, c et d désignent des nombres relatifs.

- Recopier et compléter la démonstration ci-contre.

$$\begin{aligned} (a + b)(c + d) &= a \times (\dots) + b \times (\dots) \\ (a + b)(c + d) &= a \times \dots + a \times \dots + b \times \dots + b \times \dots \\ (a + b)(c + d) &= ac + \dots + \dots + \dots \end{aligned}$$

SAVOIR FAIRE

1 J'apprends à... Utiliser le calcul littéral pour démontrer

ÉNONCÉ On se demande si les expressions littérales ci-contre sont égales.

- Calculer l'expression A pour $x = 0$.
- Calculer l'expression B pour $x = 0$.
- Les expressions A et B sont-elles égales? Justifier la réponse.

$$A = x(5x - 3) + 6$$

$$B = 5x^2 + 3$$

- Calculer l'expression C pour $x = 0$.
Les expressions A et C peuvent-elles être égales?

$$C = 5x^2 + 3(2 - x)$$

SOLUTION

1) a) Pour $x = 0$: $A = 0 \times (0 - 3) + 6 = 0 + 6 = 6$.

b) Pour $x = 0$: $B = 5 \times 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$.

c) On constate que pour $x = 0$, on a : $A \neq B$.

Donc les expressions A et B ne sont pas égales.

2) a) Pour $x = 0$: $C = 5 \times 0^2 + 3 \times (2 - 0) = 0 + 3 \times 2 = 6$.
Pour $x = 0$, les expressions A et C donnent le même résultat, ainsi ces expressions peuvent être égales, mais ce n'est pas sûr.

b) Développons les expressions A et C .

$$A = x(5x - 3) + 6 = 5x^2 - 3x + 6$$

$$C = 5x^2 + 3(2 - x) = 5x^2 + 6 - 3x = 5x^2 - 3x + 6$$

Donc les expressions A et C sont égales.

Ceci ne prouve pas que ce soit le cas pour toutes les valeurs de x .

On ne peut pas calculer A et C pour toutes les valeurs de x ; il faut utiliser le calcul littéral.



2 J'apprends à... Développer et réduire une expression littérale

- ÉNONCÉ**
- Développer et réduire l'expression : $A = (3x - 4)(7 - 5x)$.
 - Tester la réponse pour $x = 1$.

SOLUTION

$$1) A = (3x - 4)(7 - 5x)$$

$$A = (3x + (-4))(7 + (-5x))$$

$$A = 3x \times 7 + 3x \times (-5x) + (-4) \times 7 + (-4) \times (-5x)$$

$$A = 21x - 15x^2 - 28 + 20x$$

$$A = -15x^2 + 41x - 28$$

2) Pour $x = 1$:

$$\bullet (3x - 4)(7 - 5x) = (3 - 4)(7 - 5) = -1 \times 2 = -2$$

$$\bullet -15x^2 + 41x - 28 = -15 + 41 - 28 = -2$$

Le test est réussi, il semble que le travail réalisé à la question 1) soit correct.

$$3x \times (-5x) = -3 \times 5 \times x \times x = -15x^2$$

Pour tester, j'ai remplacé x par 1 dans l'expression de l'énoncé, puis dans celle que j'ai trouvée.



SAVOIR FAIRE

3 J'apprends à... Utiliser le calcul littéral pour résoudre un problème

ÉNONCÉ Jean possède le double de DVD de Paul. Franck en possède le triple de Paul.

On note x le nombre de DVD que possède Paul.

1) Écrire une expression littérale A qui permet de calculer le nombre total de DVD des trois amis. Réduire cette expression littérale.

2) En tout, ces trois amis possèdent 114 DVD.

a) Écrire une égalité vérifiée par le nombre x .

b) Quel est le nombre de DVD de chacun de ces trois amis?

SOLUTION

1) Paul possède x DVD.

Donc Jean en a $2x$ et Franck en a $3x$.

$$A = x + 2x + 3x$$

$$A = 1x + 2x + 3x \\ A = (1 + 2 + 3)x$$

$$A = (1 + 2 + 3)x$$

$$A = 6x$$

$$2) a) 6x = 114$$

$$b) x = 114 : 6 = 19$$

$$2x = 2 \times 19 = 38 \quad \text{et} \quad 3x = 3 \times 19 = 57.$$

Paul possède 19 DVD, Jean en a 38 et Franck 57.

$$\text{On a bien : } 19 + 38 + 57 = 114.$$



1 Expression littérale

DÉFINITION Une expression littérale est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.

EXEMPLE : Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ peut s'écrire $2 \times (L + \ell)$.

RÈGLE On peut supprimer le signe $\times$:

- devant une lettre ;
- devant une parenthèse.

EXEMPLES :

- $(-5) \times (-3) \times a = 15 \times a = 15a$
- $(-4) \times (5 - z) = -4(5 - z)$

Remarque : Le produit $(-5) \times 4$ est égal à -20 , il ne peut donc pas s'écrire -54 !

NOTATIONS a désigne un nombre relatif.

- $a \times a$ se note a^2 et se lit « a au carré » ou « a exposant 2 ».
- $a \times a \times a$ se note a^3 et se lit « a au cube » ou « a exposant 3 ».

EXEMPLES : • $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$ • Le volume d'un cube d'arête c est c^3 .

2 Distributivité de la multiplication

a) Développement d'une expression littérale

PROPRIÉTÉ k , a et b désignent des nombres relatifs. Quand on transforme un produit en une somme algébrique, on dit que l'on développe.

$$\text{Produit } k(a+b) = \text{Somme algébrique } ka+kb$$

EXEMPLES : • Développer $A = -3(5 + 2t)$.
 $A = -3 \times 5 + (-3) \times 2t$
 $A = -15 + (-6t)$
 $A = -15 - 6t$

• Développer $B = 5(x - 7)$.
 $B = 5 \times x + 5 \times (-7)$
 $B = 5x + (-35)$
 $B = 5x - 35$

b) Factorisation d'une expression littérale

PROPRIÉTÉ k , a et b désignent des nombres relatifs. Quand on transforme une somme algébrique en un produit, on dit que l'on factorise.

$$\text{Somme algébrique } ka+kb = \text{Produit } k(a+b)$$

EXEMPLES : • Factoriser $C = -15x - 5$.
 $C = (-5) \times 3x + (-5) \times 1$
 $C = (-5) \times (3x + 1)$
 $C = -5(3x + 1)$

• Factoriser $D = s^2 - 3s$.
 $D = s \times s + (-3) \times s$
 $D = s \times [s + (-3)]$
 $D = s(s - 3)$

3 Applications de la distributivité

a) Réduction d'une expression littérale

VOCABULAIRE Réduire une expression littérale revient à l'écrire avec le moins de termes possible.

EXEMPLES : • Réduire $E = 3a - 5a$.

$$E = 3 \times a - 5 \times a$$

$$E = (3 - 5) \times a$$

$$E = -2a$$

• Réduire $F = 5x^2 - x + 5 - 2x^2 + 3x - 9$.

$$F = 5x^2 - x + 5 - 2x^2 + 3x - 9$$

$$F = (5 - 2)x^2 + (-1 + 3)x + 5 - 9$$

$$F = 3x^2 + 2x - 4$$

Remarque : On considère l'expression $7x^2 - x$.

On peut factoriser cette expression : $7x^2 - x = (7x - 1)x$.

$7x^2$ et x n'ont pas la même partie littérale, donc on ne peut pas réduire l'expression $7x^2 - x$.

b) Suppression des parenthèses précédées d'un signe + ou d'un signe -

PROPRIÉTÉ Ajouter une somme algébrique revient à ajouter chacun de ses termes.

a , b et c désignent des nombres relatifs. On a : $a + (b + c) = a + b + c$.

EXEMPLES : • $2 + (x + 3y) = 2 + x + 3y$

• $a + (7 - 2b) = a + 7 - 2b$

• $s + (-t + r - 4) = s - t + r - 4$

PROPRIÉTÉ Soustraire une somme algébrique revient à ajouter l'opposé de chacun de ses termes.

a , b et c désignent des nombres relatifs. On a : $a - (b + c) = a - b - c$.

EXEMPLES : • $5 - (2x + y) = 5 - 2x - y$

• $b - (3 - 4a) = b - 3 + 4a$

• $r - (-s + t - 7) = r + s - t + 7$

c) Double distributivité

PROPRIÉTÉ a , b , c et d désignent des nombres relatifs. On a : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

EXEMPLES : • Développer $G = (x + 2)(3 - y)$.

$$G = x \times 3 + x \times (-y) + 2 \times 3 + 2 \times (-y)$$

$$G = 3x - xy + 6 - 2y$$

• Développer $H = (a - 5)(b + 4)$.

$$H = a \times b + a \times 4 + (-5) \times b + (-5) \times 4$$

$$H = ab + 4a - 5b - 20$$

POINT DE REPÈRE

- On peut supprimer un couple de parenthèses précédé d'un signe $+$ en supprimant ce signe $+$ et sans changer les signes des termes à l'intérieur des parenthèses.
- On peut supprimer un couple de parenthèses précédé d'un signe $-$ en supprimant ce signe $-$ et en changeant tous les signes des termes à l'intérieur des parenthèses.