

CHAPITRE 6

Puissances d'exposant entier relatif

DÉCOUVRIR

- les puissances d'exposant entier positif ;
- les puissances d'exposant entier négatif ;
- les puissances de 10 d'exposant entier relatif ;
- l'écriture scientifique d'un nombre décimal.

SOCLE COMMUN

- Calculer a^n et a^{-n} pour des nombres très simples.
- Utiliser les règles de calcul avec les puissances de 10.



Monocéros est une étoile géante rouge qui brille de manière très intense.

La structure des étoiles évolue de leur naissance jusqu'à leur mort. Avant de s'éteindre, les étoiles deviennent des géantes rouges.

À ce stade, la température de leur noyau atteint environ cent millions de degrés Celsius et leur diamètre peut atteindre cinq cents millions de kilomètres.

Actuellement, le Soleil a une température au noyau d'environ quinze millions de degrés Celsius et un diamètre d'environ un million trois cent quatre-vingt-douze mille kilomètres.

- Écrire en chiffres les quatre nombres donnés dans ce texte.
- Quel est l'inconvénient de l'écriture de ces nombres ?
- Le Soleil est-il une étoile géante rouge ? Expliquer pourquoi.

1 J'apprends à... Calculer avec des puissances

ÉNONCÉ Écrire chaque nombre sous la forme a^n , où a est un nombre relatif et n un nombre entier relatif.

- a) $7^5 \times 7^{-3}$; b) $3^2 \times 5^2$; c) $\frac{4^2}{4^{-1}}$.

SOLUTION

a) $7^5 \times 7^{-3} = 7^5 \times \frac{1}{7^3} = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times \frac{1}{7 \times 7 \times 7} = 7^2$

7^{-3} est l'inverse de 7^3
c'est-à-dire $\frac{1}{7^3}$.

b) $3^2 \times 5^2 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3 \times 5 \times 3 \times 5 = (3 \times 5)^2 = 15^2$

J'ai reconnu 2 facteurs égaux à (3×5) .

c) $\frac{4^2}{4^{-1}} = \frac{4^2}{\frac{1}{4}} = 4^2 \times \frac{4}{1} = 4^2 \times 4 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$

Je divise par $\frac{1}{4}$,
donc je multiplie par son inverse
qui est $\frac{4}{1}$.



2 J'apprends à... Calculer avec des puissances de 10

ÉNONCÉ Écrire chaque nombre sous la forme 10^n , où n est un nombre entier relatif.

- a) $10^5 \times 10^{-7}$; b) $\frac{10^5}{10^{-2}}$; c) $(10^2)^3$.

SOLUTION

a) $10^5 \times 10^{-7} = 10^{5+(-7)} = 10^{-2}$

C'est un produit de puissances de 10, donc j'ajoute les exposants.

b) $\frac{10^5}{10^{-2}} = 10^{5-(-2)} = 10^{5+2} = 10^7$

C'est un quotient de puissances de 10, donc je soustrais les exposants.

c) $(10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6$

C'est une puissance d'une puissance de 10, donc je multiplie les exposants.



3 J'apprends à... Donner l'écriture scientifique d'un nombre

ÉNONCÉ Donner l'écriture scientifique de chaque nombre.

$A = 0,000\,56$; $B = 45\,800 \times 10^5$.

SOLUTION

$A = 0,000\,56$

$A = 5,6 \times 10^{-4}$

5 doit être le seul chiffre avant la virgule, donc j'ai décalé la virgule de 4 rangs : 0,000 56.

0,000 56 est inférieur à 1, donc l'exposant est négatif.

$B = 45\,800 \times 10^5$

$B = 4,58 \times 10^4 \times 10^5$

$B = 4,58 \times 10^{4+5}$

$B = 4,58 \times 10^9$

4 doit être le seul chiffre avant la virgule, donc j'ai décalé la virgule de 4 rangs : 45 800.

45 800 est supérieur à 1, donc l'exposant est positif.



1 Je découvre la notation puissance

Les bactéries se développent d'une façon particulière.

Une bactérie « se partage » en deux bactéries, chacune des deux bactéries obtenues « se partage » en deux nouvelles bactéries, etc. Lorsque les conditions sont favorables, le nombre de bactéries est multiplié par deux toutes les trente minutes.

1 Un chercheur met en culture une bactérie dans des conditions favorables. Combien obtient-il de bactéries au bout de :

- a) 30 min ? b) 1 h ? c) 1 h 30 min ? d) 2 h ?

2 Recopier et compléter les phrases ci-dessous.

a) « Au bout de deux heures, le nombre de bactéries est : $2 \times 2 \times 2 \times 2$.

C'est le produit de ... facteurs égaux à ... »

b) « Au bout de trois heures, le nombre de bactéries est : $2 \times \dots \times \dots$ etc.

C'est le produit de ... facteurs égaux à ... »

3 a) Quel produit doit-on effectuer pour calculer le nombre de bactéries obtenues par ce chercheur au bout de cinq heures ?

b) Quel est l'inconvénient de cette écriture ?

Pour remédier à cet inconvénient, on note ce produit 2^{10} .

2^{10} est une **puissance** de 2 et se lit « 2 **exposant** 10 ».

Ainsi, 2^{10} est égal au produit de 10 facteurs tous égaux à 2.

4 Écrire sous la forme d'une puissance de 2 le nombre de bactéries obtenues au bout de 24 heures.



▲ Une bactérie « partagée » en deux.

2 Je découvre les puissances d'exposant entier négatif

1 a) Sans calculer 2^3 , écrire l'inverse du nombre 2^3 .

b) L'inverse du nombre 2^3 est aussi noté 2^{-3} .

Recopier et compléter : $2^{-3} = \frac{1}{\dots}$.

c) Calculer 2^3 , puis sans utiliser la notation puissance, écrire une fraction égale à 2^{-3} .

d) Recopier et compléter : $2^{-3} = \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$.

2 Donner l'inverse du nombre 3^4 sous trois formes différentes.

Recopier et compléter : $3^{-4} = \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$.

3 a) Quel est l'inverse du nombre $(-2)^5$?

b) L'inverse du nombre $(-2)^5$ est aussi noté $(-2)^{-5}$.

Recopier et compléter : $(-2)^{-5} = \frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$.

4 Écrire la fraction $\frac{1}{16}$ sous la forme 2^n où n est un nombre entier relatif.

5 a désigne un nombre relatif non nul.

Écrire l'inverse du nombre a sous la forme a^n où n est un nombre entier relatif.

$$a = a^1$$



3 Je découvre les puissances de 10

A Exposant entier positif



Dans les aventures de Tintin de l'album *Coke en stock*, le capitaine Haddock vocifère fréquemment.

1 a) Écrire en chiffres le nombre mille.

Combien de fois écrit-on le chiffre zéro dans ce nombre ?

b) Écrire le nombre mille comme un produit de plusieurs facteurs tous égaux à 10.

En déduire son écriture sous la forme 10^n où n est un nombre entier relatif.

Dans cette écriture, quel est l'exposant ?

c) Pour le nombre mille, faire une conjecture sur le nombre de zéros dans son écriture décimale et l'exposant de son écriture sous la forme 10^n .

2 Dans l'expression « mille millions de sabords », on considère le nombre écrit en rouge.

Pour ce nombre écrit en rouge, la conjecture précédente est-elle vérifiée ? Justifier la réponse.

B Exposant entier négatif

1 Recopier et compléter.

a) $10^{-1} = \frac{1}{10} = \frac{1}{\dots} = 0,\dots$;

b) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{\dots} = 0,\dots$;

c) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{\dots} = 0,\dots$

2 Faire une conjecture concernant l'écriture décimale du nombre 10^{-8} .

4 J'établis les règles de calcul sur les puissances de 10

A Produit

1 Recopier et compléter les expressions suivantes :

a) $10^2 \times 10^3 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots = 10^{\dots} = 10^{2+3}$;

b) $10^2 \times 10^{-3} = \dots \times \dots \times \frac{1}{\dots \times \dots \times \dots} = \frac{\dots \times \dots \times 1}{\dots} = 10^{\dots} = 10^{2+(-3)}$.

2 Calculer de même $10^5 \times 10^{-2}$ et $10^{-4} \times 10^{-3}$.

B Quotient

1 Recopier et compléter les expressions suivantes :

a) $\frac{10^4}{10^2} = \frac{\dots \times \dots \times \dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \dots \times \dots = 10^{\dots} = 10^{4-2}$;

b) $\frac{10^5}{10^{-2}} = 10^5 : 10^{-2} = 10^5 \times 10^{\dots}$;

$\frac{10^5}{10^{-2}} = \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots = 10^{\dots} = 10^{5+2} = 10^{5-(-2)}$.

2 Calculer de même $\frac{10^{-2}}{10^3}$ et $\frac{10^{-3}}{10^{-4}}$.

C Puissance d'une puissance de 10

1 Recopier et compléter les expressions suivantes :

a) $(10^2)^3 = (10^2) \times (10^2) \times (10^2) = \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots = 10^{\dots} = 10^{2 \times 3}$;

b) $(10^2)^{-3} = \frac{1}{(10^2)^3} = \frac{1}{10^2 \times 10^2 \times 10^2} = \frac{1}{\dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots} = \frac{1}{10^{\dots}} = 10^{\dots} = 10^{2 \times (-3)}$.

2 Calculer de même $(10^3)^2$ et $(10^{-4})^{-2}$.

Diviser par 10^{-2} revient à multiplier par son inverse 10^2 .



1 Puissances d'un nombre relatif

a) Puissances d'exposant entier positif

DÉFINITION a désigne un nombre relatif et n désigne un nombre entier positif non nul.

Le produit de n facteurs tous égaux à a se note a^n .

a^n est une puissance du nombre a et se lit « a exposant n ».

Le nombre n est appelé l'exposant.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

EXEMPLES :

$$\bullet 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \quad \bullet (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8 \quad \bullet \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

■ **Remarques :** 3^4 se lit « trois exposant quatre ».

$(-2)^3$ se lit « moins deux exposant trois » ou « moins deux au cube ».

Cas particuliers : $\bullet$ Pour $n \neq 0$, $0^n = 0$. $\bullet a^1 = a$. $\bullet$ Pour $a \neq 0$, on convient que : $a^0 = 1$.

■ **EXEMPLES :** $\bullet 0^{12} = 0$ $\bullet (-5)^1 = -5$ $\bullet 2,8^0 = 1$

b) Puissances d'exposant entier négatif

DÉFINITION a désigne un nombre relatif non nul et n désigne un nombre entier positif non nul.

Le nombre a^{-n} est l'inverse du nombre a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\bullet 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} \quad \bullet (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} \quad \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8}$$

Cas particulier : Pour $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$. Ainsi, le nombre a^{-1} est l'inverse du nombre a .

■ **EXEMPLES :** $\bullet (-2)^{-1} = \frac{1}{-2}$. $\bullet$ L'inverse du nombre 2,5 est $2,5^{-1}$.

c) Calcul d'une expression utilisant les puissances

PROPRIÉTÉ Pour calculer une expression numérique écrite sans parenthèses, on commence par calculer les puissances.

$$\bullet A = 2 - 3^2 = 2 - 9 = -7 \quad \bullet B = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

■ **Remarque :** Pour calculer une expression numérique écrite avec parenthèses, on commence par effectuer les calculs entre parenthèses.

$$\bullet C = (2 - 3)^2 = (-1)^2 = 1 \quad \bullet D = (2 \times 3)^2 = (6)^2 = 36$$

POINT DE REPÈRE

! **Attention au rôle des parenthèses :**

$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25 \quad \text{et} \quad -5^2 = -(5 \times 5) = -25. \quad \text{On a donc : } (-5)^2 \neq -5^2.$$

2 Cas particulier : les puissances de 10

a) Puissances de 10 d'exposant entier positif

PROPRIÉTÉ (ADMISE) n désigne un nombre entier positif non nul.

Le produit de n facteurs tous égaux à 10 se note 10^n .

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10} = 10 \dots 0$$

n zéros

■ **EXEMPLE :** L'écriture décimale du nombre 10^7 s'écrit avec un 1 suivi de 7 zéros.
Donc $10^7 = 10\,000\,000$.

b) Puissances de 10 d'exposant entier négatif

PROPRIÉTÉ (ADMISE) n désigne un nombre entier positif non nul.

Le nombre 10^{-n} est l'inverse du nombre 10^n .

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10}} = 0, \underbrace{0 \dots 01}_n$$

n chiffres après la virgule

■ **EXEMPLE :** L'écriture décimale du nombre 10^{-5} possède 5 chiffres après la virgule.
Donc : $10^{-5} = 0,00001$.

c) Règles de calcul sur les puissances de 10

PROPRIÉTÉS (ADMISES) n et p désignent deux nombres entiers relatifs.

$$\bullet 10^n \times 10^p = 10^{n+p} \quad \bullet \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p} \quad \bullet (10^n)^p = 10^{n \times p}$$

EXEMPLES :

$$\bullet 10^5 \times 10^3 = 10^{5+3} = 10^8 \quad \bullet \frac{10^9}{10^{11}} = 10^{9-11} = 10^{-2} \quad \bullet (10^8)^4 = 10^{8 \times 4} = 10^{32}$$

$$\bullet 10^5 \times 10^{-7} = 10^{5+(-7)} = 10^{-2} \quad \bullet \frac{10^5}{10^{-4}} = 10^{5-(-4)} = 10^9 \quad \bullet (10^{-2})^{-3} = 10^{-2 \times (-3)} = 10^6$$

3 Écriture scientifique d'un nombre décimal

■ **Remarque :** Tout nombre décimal peut s'écrire sous différentes formes utilisant des puissances de 10.

■ **EXEMPLES :** $\bullet 12\,835\,000 = 12\,835 \times 10^3 = 12,835 \times 10^6 = 1,2835 \times 10^7 = \dots$
 $\bullet 0,003\,125 = 3,125 \times 10^{-3} = 3\,125 \times 10^{-6} = 3\,125\,000 \times 10^{-9} = \dots$

DÉFINITION L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est l'unique écriture de la forme

$a \times 10^n$ dans laquelle : $\bullet a$ est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$;
 $\bullet n$ est un nombre entier relatif.

■ **EXEMPLES :** $\bullet$ L'écriture scientifique du nombre 12 835 000 est $1,2835 \times 10^7$.
 $\bullet$ L'écriture scientifique du nombre 0,003 125 est $3,125 \times 10^{-3}$.