RETENIR

1. DÉVELOPPER (vu en 4e)

Définition et propriétés

- **Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique.**
- **Pour n'importe quels nombres relatifs k, a, b, c et d :**

– distributivité simple : $k(a+b) = ka + kb$;

– distributivité double : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

Exemples

Développer, réduire et ordonner les expressions E et F :

$E = (x+2)(x-3) - x(x-8)$		$F = (5x-1)(4-x)$
$E = x^2 - 3x + 2x - 6 - x^2 + 8x$	on développe	$F = 20x - 5x^2 - 4 + x$
$E = 7x - 6$	on réduit les termes semblables et on les ordonne	$F = -5x^2 + 21x - 4$

2. IDENTITÉS REMARQUABLES

Propriétés

Pour n'importe quels nombres relatifs a et b :

type ① **carré d'une somme :** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

type ② **carré d'une différence :** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

type ③ **produit d'une somme par une différence :** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

type ① Exemples

$(x+4)^2 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

$101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 200 + 1 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$.

type ② Exemples

$(4x-5)^2 = 16x^2 - 40x + 25$

carré de $4x$: $(4x)^2 = 4^2x^2 = 16x^2$

double produit : $2 \times (4x \times 5)$

carré de 5

$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 200 + 1 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.

type ③ Exemples

$(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

$101 \times 99 = (100+1)(100-1) = 100^2 - 1 = 10\,000 - 1 = 9\,999$.

METTRE EN PRATIQUE

Comment traduire un énoncé par une écriture littérale ?

Énoncé 1

L'illusionniste : *« Ajoutez 2 à votre âge, retranchez 2 à votre âge, puis multipliez ces deux résultats. Ajoutez 5 à ce dernier résultat et enfin retranchez le carré de votre âge. Votre résultat est 1, n'est-ce-pas ? »*
Le spectateur : *« C'est exact ! »*
Expliquer pourquoi ce n'est pas de la « magie ».

Solution

Désignons par x l'âge du spectateur.

$(x+2)(x-2)$

$(x+2)(x-2)+5$

$(x+2)(x-2)+5-x^2$

$x^2-4+5-x^2=\boxed{1}$.

On trouve 1 quel que soit l'âge x.

Commentaires

Traduction par une écriture littérale de :

« Ajoutez 2 à votre âge, retranchez 2 à votre âge, puis multipliez ces deux résultats. »

« Ajoutez 5 à ce dernier résultat... »

« ... retranchez le carré de votre âge. »

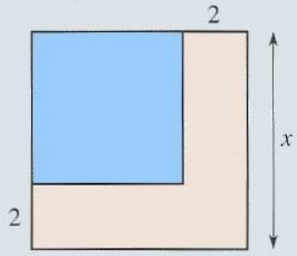
On développe le produit remarquable $(x+2)(x-2)$, puis on réduit.

Énoncé 2

Un carré a pour côté x $(x>2)$.
On diminue le côté de 2.
Exprimer en fonction de x :

a. l'aire du petit carré obtenu ;

b. la diminution de l'aire du carré de départ et montrer que cette diminution peut s'écrire $4(x-1)$.



Solution

a. Aire du carré après diminution du côté : $(x-2)^2$.

b. Aire du carré au départ : x^2.
Diminution de l'aire :

$$\begin{aligned} x^2-(x-2)^2 &= x^2-(x^2-4x+4) \\ &= x^2-x^2+4x-4 \\ &= 4x-4 \\ &= \boxed{4(x-1)}. \end{aligned}$$

Commentaires

On développe le produit remarquable $(x-2)^2$ et on réduit.

On utilise la propriété de distributivité.

Application : exercices 10 et 11

RETENIR

3. FACTORISER

Définition

Factoriser une somme algébrique, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

1er cas

1er cas	sommes algébriques		produits
factoriser en utilisant la propriété de distributivité	$ka + kb$ $ka - kb$	$=$ $=$	$k(a + b)$ $k(a - b)$

Exemples

Factoriser les expressions A et B.

$A = 3x^2 + 6x$
$A = 3x \times x + 2 \times 3x$
$A = 3x(x + 2)$

$3x$ est le facteur commun, on met $3x$ en facteur

$B = (x + 1)(x + 2) - 5(x + 2)$
$B = (x + 1)(x + 2) - 5(x + 2)$
$B = (x + 2)[(x + 1) - 5]$
$B = (x + 2)(x - 4)$

$(x + 2)$ est le facteur commun, on met $(x + 2)$ en facteur

2nd cas

2nd cas	sommes algébriques		produits
factoriser en utilisant les identités remarquables	$a^2 - b^2$ $a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - 2ab + b^2$	$=$ $=$ $=$	$(a + b)(a - b)$ $(a + b)^2$ $(a - b)^2$

Exemples

Factoriser les expressions C, D et E.

C est de la forme « $a^2 - b^2$ » avec $a = 2x$ et $b = 5$

$C = 4x^2 - 25$
$C = (2x)^2 - 5^2$
$C = (2x + 5)(2x - 5)$

D est de la forme « $a^2 + 2ab + b^2$ » avec $a = x$ et $b = 3$

$D = x^2 + 6x + 9$
$D = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2$
$D = (x + 3)^2$

E est de la forme « $a^2 - 2ab + b^2$ » avec $a = x$ et $b = 7$

$E = x^2 - 14x + 49$
$E = x^2 - 2 \times 7 \times x + 7^2$
$E = (x - 7)^2$

METTRE EN PRATIQUE

Comment factoriser en utilisant la propriété de distributivité ?

Reconnaître un facteur commun

Énoncé

Factoriser l'expression suivante : $E=(2x+1)^2-(2x+1)(x-3)$.

Solution

$B=(2x+1)^2-(2x+1)(x-3)$

$B=(2x+1)(2x+1)-(2x+1)(x-3)$

$B=(2x+1)[(2x+1)-(x-3)]$

$B=(2x+1)[2x+1-x+3]$

$\boxed{B=(2x+1)(x+4)}$.

Commentaires

On remarque que : $(2x+1)^2=(2x+1)(2x+1)$.

$(2x+1)$ est le facteur commun.

On met $(2x+1)$ en facteur.

Attention aux signes.

Application : exercices 32 et 33

Comment factoriser en utilisant les identités remarquables ?

Reconnaître la différence de deux carrés « a^2-b^2 »

Énoncé 1

Factoriser l'expression suivante : $F=(x+5)^2-4$.

Solution

$E=(x+5)^2-4$

$E=[(x+5)+2][(x+5)-2]$

$\boxed{E=(x+7)(x+3)}$.

Commentaires

E est de la forme « a^2-b^2 » avec $a=x+5$ et $b=2$.

On factorise en utilisant l'identité remarquable : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Une expression algébrique comme x^2+36 est une somme de deux carrés. Il ne s'agit donc pas de la forme « a^2-b^2 » et on ne peut pas factoriser cette expression.

Reconnaître les développements « $a^2+2ab+b^2$ » ou « $a^2-2ab+b^2$ »

Énoncé 2

Factoriser l'expression suivante : $G=9x^2-24x+16$.

Solution

$G=9x^2-24x+16$

$\boxed{G=(3x-4)^2}$.

Commentaires

G semble de la forme « $a^2-2ab+b^2$ » avec $a=3x$ et $b=4$.

On vérifie le double produit : $2ab=2\times 3x\times 4=24x$.

On factorise donc en utilisant l'identité remarquable : $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Application : exercices 37 à 40