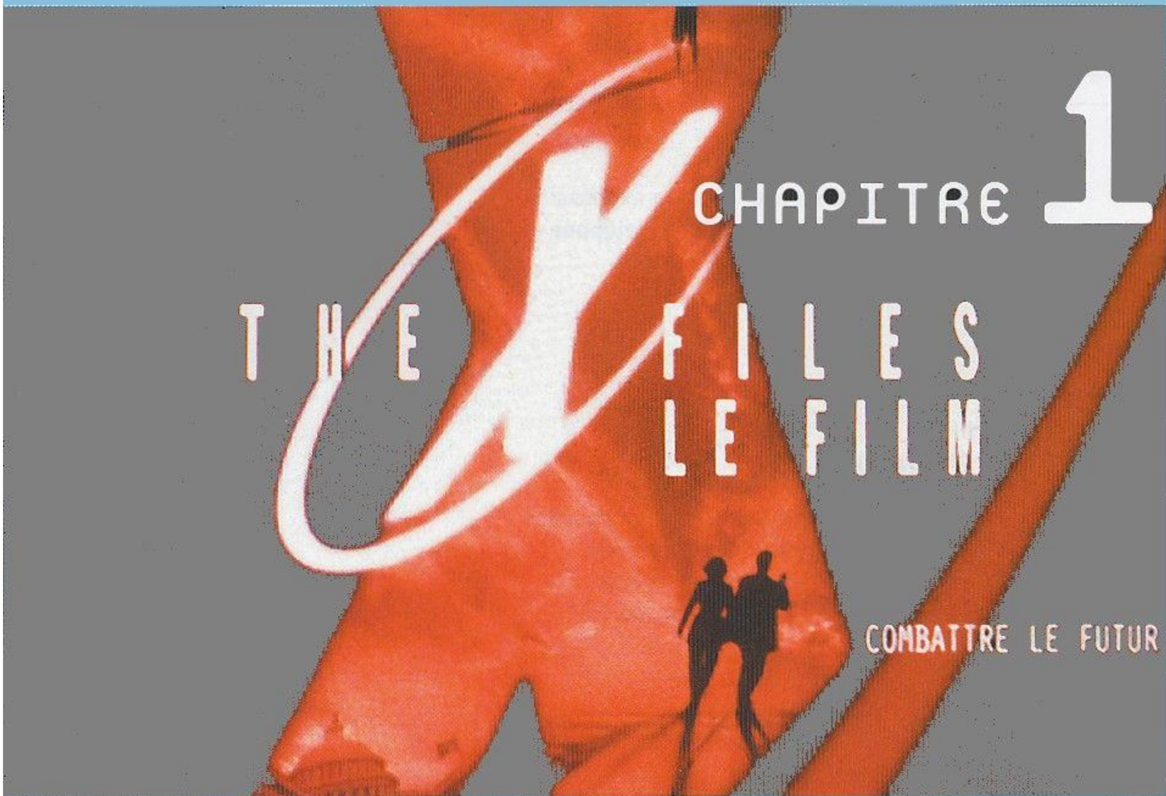
ÉCRITURES LITTÉRALES
IDENTITÉS REMARQUABLES

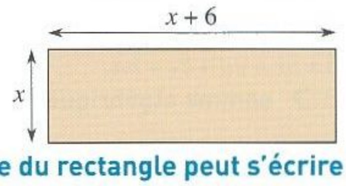


Le film « The X files » (1998) raconte l'histoire de deux agents du FBI qui enquêtent sur des phénomènes étranges et inexpliqués.

De la 4ᵉ à la 3ᵉ

QCM

Pour chaque question, indiquer la réponse exacte (ou les réponses exactes).

		A	B	C	D
1	La forme réduite de $n+(1-n)-(n-2)$ est :	$n-3$	$3-n$	$-n-1$	$1-n$
2	Pour $x=\frac{1}{3}$, la valeur numérique de $E=4(x+1)-(x+3)$ est :	2	3	8	9
3	x^2+5x est égal à :	$7x$	$5x^3$	$5x(x+1)$	$x(x+5)$
4	La forme développée et réduite de $(x+3)(x-2)$ est :	x^2-6	x^2-x-6	x^2+x-6	x^2+5x-6
5	 L'aire du rectangle peut s'écrire :	$x(x+6)$	x^2+6x	$2(2x+6)$	$4x(x+6)$

DE QUOI S'AGIT-IL ?

Comment développer, puis réduire une expression ?

1. Distributivité simple (vue en 4e)

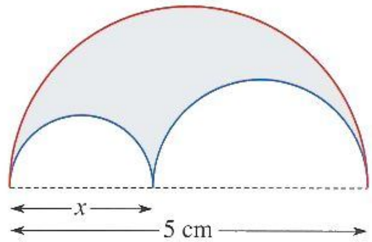
1re partie

Recopier, puis relier chaque expression du cadre de gauche à celle développée et réduite qui lui est égale à droite.

$3(4x+1)-16x-1$	$-4x-2$
$-(2x-7)+(6x-5)$	$4x-2$
$x(x-4)-(x^2+2)$	$4x+2$
$4(3x-3)-2(4x-5)$	$-4x+2$

2de partie

Comparer la longueur des deux courbes :
– en rouge (le grand demi-cercle) ;
– en bleu (les deux demi-cercles).
(On prendra 3,14 pour valeur de π.)



Ligne rouge = 3.14 x 5 / 2 =7.85 cm
Lignes bleues = 3.14 x [x + (5-x)] / 2 = 7,85 cm

ou littéralement :

$$\mathscr{L}_{\text{rouge}} = \frac{5\pi}{2}\text{ cm},$$

$$\mathscr{L}_{\text{bleue}} = \frac{x\pi}{2} + \frac{(5-x)\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}\text{ cm},$$

donc $\mathscr{L}_{\text{rouge}} = \mathscr{L}_{\text{bleue}}$.

2. Distributivité double (vue en 4e)

Répondre par VRAI ou FAUX et justifier.

a. Le développement du produit $(a-4)(b+5)$ est $ab+5a-4b+20$.

Faux (-20 et non $+20$).

b. Le développement du produit $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+6)$ est $2x^2+5x+3$. Faux (-3 et non $+3$).

c. Quel que soit n, on peut écrire $n+(n+1)(n-2)+2=n^2$. Vrai.

d. Si $A=6(x+1)-2y$, $B=-3x-2(z-y)$ et $C=(x+2)(z-3)$, alors $A+B+C=xz$.

Vrai, car $A=6x+6-2y$;
$B=-3x-2z+2y$;
$C=xz-3x+2z-6$;
donc $A+B+C=xz$.

On retiendra que **développer un produit**, c'est l'écrire sous forme de somme algébrique. Pour cela, on utilise la propriété de distributivité.

Pour n'importe quels nombres relatifs k, a, b, c et d :

$$k(a+b)=ka+kb$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

produit ⇨ somme algébrique

DE QUOI S'AGIT-IL ?

Que signifie « identités remarquables » ?

3. Remarquable !

1re partie • Carré d'une somme

1. a. Les lettres a et b désignent des nombres.

Développer et réduire $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \dots$.

b. Dans chaque suite d'égalités ci-dessous, il y a bien sûr une erreur ; laquelle ?

$$\mathbf{100} = 10^2 = (7+3)^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = \mathbf{58}$$

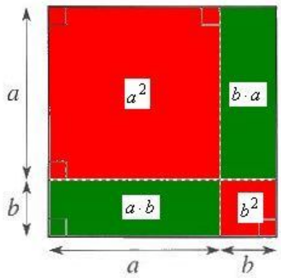
$$100 = 10^2 = (7+3)^2 = (7+3)\times(7+3) = 7\cdot7 + 7\cdot3 + 3\cdot7 + 3\cdot3 = 7^2 + 2\cdot3\cdot7 + 3^2 = 100$$

$$100 = 10^2 = (6+4)^2 = (6+4)\times(6+4) = 6\cdot6 + 6\cdot4 + 4\cdot6 + 4\cdot4 = 6^2 + 2\cdot4\cdot6 + 4^2 = 100$$

$$\mathbf{100} = 64 + 36 = 8^2 + 6^2 \neq \cancel{(8+6)^2 = 14^2 = \mathbf{196}} .$$

2. a. Pour la figure ci-contre, que calcule-t-on lorsqu'on écrit $a+b$? $(a+b)^2$?

c'est le côté du grand carré c'est l'aire du grand carré



b. Reproduire cette figure.
Colorier en rouge l'aire représentée par $a^2 + b^2$.
Colorier en vert l'aire représentée par $2ab$.

c. À l'aide de a et b , écrire l'égalité qui montre que l'aire de la figure s'exprime de deux façons.

$$A = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2$$
$$A = (a+b)\times(a+b)$$

2e partie • Carré d'une différence

1. Développer et réduire : $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) =$

$$(a-b)^2 = (a-b)\times(a-b) = a^2 - a\cdot b - b\cdot a + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. Dans chaque suite d'égalités ci-dessous, il y a bien sûr une erreur ; laquelle ?

$$\mathbf{16} = 4^2 = (5-1)^2 \neq \cancel{5^2 - 1^2 = 25 - 1 = \mathbf{24}}$$

$$(5-1)^2 = (5-1)\times(5-1) = 5^2 - 5\cdot1 - 1\cdot5 + 1^2 = 5^2 - 2\cdot5\cdot1 + 1^2 = 25 - 10 + 1 = 16$$

$$\mathbf{16} = 25 - 9 = 5^2 - 3^2 \neq \cancel{(5-3)^2 = 2^2 = \mathbf{4}} .$$

Il est indispensable de connaître par cœur les trois développements correspondant aux trois produits : $(a+b)^2$; $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$.
Les trois égalités obtenues s'appellent **des identités remarquables**, car elles sont vérifiées pour toute valeur donnée à a et b .

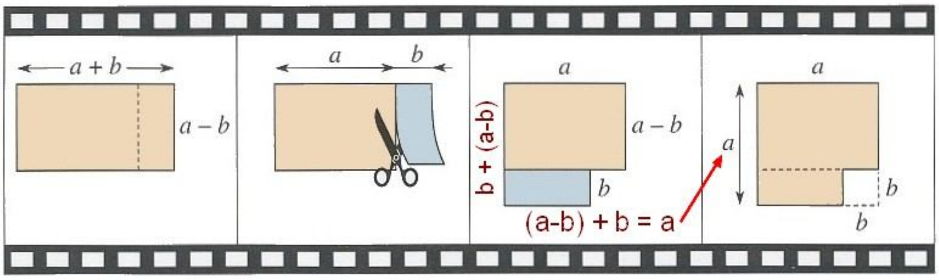
DE QUOI S'AGIT-IL ?

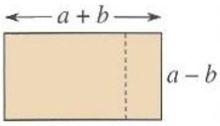
Que signifie « identités remarquables » ?

3. Remarquable !

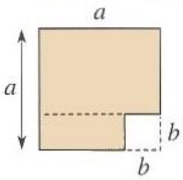
3e partie • **Produit d'une somme par une différence**

1. L'histoire sans paroles décrite ci-dessous conduit à une égalité ; laquelle ?





A1 = (a + b) x (a - b)



A2 = (a x a) - (b x b) = a^2 - b^2

Sachant que : A1 = A2 on peut donc dire que (a + b) x (a - b) = a^2 - b^2

2. Développer et réduire le produit $(a+b)(a-b)$. Comparer avec l'égalité du **1.**

$$(a+b)\times(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

Il est indispensable de connaître par cœur les trois développements correspondant aux trois produits : $(a+b)^2$; $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$.
Les trois égalités obtenues s'appellent **des identités remarquables**, car elles sont vérifiées pour toute valeur donnée à a et b .

DE QUOI S'AGIT-IL ?

Comment factoriser une expression ?

4. Expressions factorisées ou développées

(A) x^2+3x	(B) $(x+3)^2$	(C) x^2+6x+9	(D) $(x-3)^2$
(E) $x(x-3)$	(F) x^2-16	(G) $(x+8)(x-2)$	(H) $x(x+3)$
(I) x^2-3x	(J) $(x+4)(x-4)$	(K) x^2-6x+9	(L) $x^2+6x-16$

En classant ces douze expressions, celles factorisées (mises sous forme de produit), d'une part, et celles développées, d'autre part, Sabine constate que toutes « *vont par deux* ».

Retrouver le classement de Sabine et remplir un tableau de type ci-dessous :

expressions factorisées			expressions développées	
(H)	$x(x+3)$	=	x^2+3x	(A)
(B)	$(x+3)^2$	=	x^2+6x+9	(C)
(D)	$(x-3)^2$	=	x^2-6x+9	(K)
(E)	$x(x-3)$	=	x^2-3x	(I)
(J)	$(x+4)(x-4)$	=	x^2-16	(F)
(G)	$(x+8)(x-2)$	=	$x^2+6x-16$	(L)

5. Le facteur commun

1^re^ partie

Calculer mentalement :

$A = 5{,}24 \times 3 + 5{,}24 \times 7$;

$B = 1{,}3 \times 7{,}2 - 7{,}2 \times 0{,}3$;

$C = 0{,}5 \times \frac{16}{13} + 0{,}5 \times \frac{10}{13}$.

$A = 5{,}24(3+7) = 5{,}24 \times 10 = 52{,}4$;

$B = 7{,}2(1{,}3-0{,}3) = 7{,}2 \times 1 = 7{,}2$;

$C = 0{,}5\left(\frac{16}{13}+\frac{10}{13}\right) = 0{,}5 \times 2 = 1$.

2^de^ partie

$D = (2x-1)\underline{(x-1)} - 2\underline{(x-1)}$; $E = \underline{x}(2x-1) - \underline{x}(x+2)$;

$F = (x-1)\underline{(2x-1)} + \underline{(2x-1)}(x+2)$; $G = \underline{(x+2)}^2 + (2x-1)\underline{(x+2)}$.

1. Recopier chaque expression ci-dessus et souligner le facteur commun.

2. On a pu factoriser chaque expression en utilisant la règle de distributivité. Les quatre résultats obtenus sont donnés ci-dessous *en vrac* et *incomplets*.
Remplacer les pointillés par les expressions convenables :

$D = (2x-1)(x-3)$; $E = x[(2x-1)-(x+2)] = x(2x-1-x-2) = x(x-3)$;

$F = (2x-1)(2x+1)$; $G = (x+2)(3x+1)$.

On retiendra que **factoriser une somme algébrique**, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.
Lorsqu'on parvient à reconnaître des développements du type $ka+kb$ ou $ka-kb$, on peut factoriser ces développements en utilisant la règle de distributivité :

$$ka + kb = k(a+b)$$
$$ka - kb = k(a-b)$$

somme algébrique ⇨ produit

DE QUOI S'AGIT-IL ?

Comment factoriser une expression ? (suite)

6. Des développements à remarquer

1re partie

1. Il paraît que l'on peut effectuer mentalement les deux calculs suivants :

$A = 55^2 - 45^2$; $B = 101^2 - 99^2$.

Donner le résultat en recherchant, pour chaque calcul, une procédure qui évite de poser les opérations. *(Penser aux résultats de la page 15.)*

1. $A = (55 + 45)(55 - 45) = 100 \times 10 = 1\ 000$;
$B = (101 + 99)(101 - 99) = 200 \times 2 = 400$.

2. Soit l'expression $E = 4x^2 - 1$.
L'un des six produits du tableau ci-dessous est égal à E ; lequel ?
(On peut bien sûr développer tous les produits, mais il est préférable d'essayer de reconnaître dans l'expression E un développement d'identité remarquable.)

2. $E = 4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$.

$(4x - 1)(4x + 1)$	$(x + 4)(x - 4)$	$4(x - 1)(x + 1)$
$(2x - 1)^2$	$(2x + 1)(2x - 1)$	$4x(x - 1)$

2de partie

1. Il paraît que l'on peut effectuer mentalement les calculs suivants :

$C = 3{,}5^2 + 2 \times 3{,}5 \times 1{,}5 + 1{,}5^2$; $D = \left(\frac{9}{7}\right)^2 - 2 \times \frac{9}{7} \times \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2$.

Donner le résultat en recherchant, pour chaque calcul, une procédure qui évite de poser les opérations. *(Penser aux résultats de la page 15.)*

1. $C = (3{,}5 + 1{,}5)^2 = 25$;

$D = \left(\frac{9}{7} - \frac{2}{7}\right)^2 = \left(\frac{7}{7}\right)^2 = 1$.

2. Soit l'expression $F = x^2 - 6x + 9$.
L'un des six produits du tableau ci-dessous est égal à F ; lequel ?

2. $F = x^2 - 6x + 9$
$= (x - 3)^2$.

$(x + 3)^2$	$(x - 6)^2$	$3x(x - 3)$
$(x - 3)(x + 3)$	$(x - 3)^2$	$x(x - 6)$

Lorsqu'on parvient à reconnaître des développements du type :

$\boldsymbol{a^2 - b^2}$ ou $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$ ou $\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$,

on peut factoriser ces développements en utilisant les identités remarquables :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 .$$

somme algébrique ⇨ produit