Chapitre 1, Livre $3^{\text{ème}}$

Ecritures littérales – Factoriser, série 2

74 Soit : $E=(4x-1)^2-(4x-1)(x+5)$.

a. Montrer que E peut s'écrire :

$$3(4x-1)(x-2)\ .$$

b. Calculer E pour $x=0$, puis pour $x=2$.

74 **a.** $E=(4x-1)[4x-1-(x+5)]$
$=(4x-1)(3x-6)$
$=3(4x-1)(x-2)$.

b. Il est évidemment préférable d'utiliser l'expression factorisée, mais peu d'élèves encore ont acquis l'habitude de choisir l'expression qui convient le mieux. Cette attitude oblige à anticiper.
Pour $x=0$, $3(4\times 0-1)(0-2)=6$;
pour $x=2$, $3(4\times 2-1)(2-2)=0$.

75 Soit : $F=(3x-1)^2-36$.

a. Calculer la valeur de F pour $x=0$.

b. Calculer la valeur de F pour $x=\dfrac{7}{3}$.

c. Factoriser F .

75 **a.** Pour $x=0$,
$F=(3\times 0-1)^2-36=-35$.

b. Pour $x=\dfrac{7}{3}$, $F=\left(3\times\dfrac{7}{3}-1\right)^2-36=0$.

c. $F=(3x-1+6)(3x-1-6)$
$=(3x+5)(3x-7)$.

76 Soit : $G=(3x-2)^2-(2x+1)(3x-2)$.

a. Développer et réduire G .

b. Factoriser G .

c. Calculer G pour $x=3$.

76 **a.** $G=9x^2-12x+4-(6x^2-x-2)$
$=3x^2-11x+6$.

b. $G=(3x-2)[3x-2-(2x+1)]$
$=(3x-2)(x-3)$.

c. L'expression factorisée est l'écriture de G la mieux adaptée.
Pour $x=3$, $G=(3\times 3-2)(3-3)=0$.

77 Soit : $H=(x-3)(2x+5)+x^2-9$.

a. Développer et réduire H .

b. Factoriser x^2-9 , puis factoriser H .

c. Calculer H pour $x=-3$, puis pour $x=3$.

77 **a.** $H=2x^2+5x-6x-15+x^2-9$
$=3x^2-x-24$.

b. $x^2-9=(x+3)(x-3)$;
$H=(x-3)(2x+5+x+3)$
$=(x-3)(3x+8)$.

c. • Pour $x=-3$, choisir soit l'écriture développée, soit l'écriture factorisée.

$$H=3(-3)^2-(-3)-24=6\ .$$

• Pour $x=3$, choisir l'écriture factorisée.

$$H=(3-3)(3\times 3+8)=0\ .$$

78 * **Où est l'astuce ?**

1. Développer et réduire $E=(x-1)^2+4x$.

2. En déduire une factorisation en E .

3. Sans effectuer les calculs, justifier les égalités :

$$49^2+200=51^2\ ;$$
$$99^2+400=101^2\ .$$

4. Compléter l'égalité suivante (même type qu'au **3.**) :

$$199^2+\dots=\dots^2\ .$$

78 * **1.** $E=x^2-2x+1+4x=x^2+2x+1$.

2. $E=(x+1)^2$.

3. • Établir le lien avec le **1.** et le **2.** en posant $x=50$.

$$(50-1)^2+4\times 50=(50+1)^2\ .$$

• Établir le lien avec le **1.** et le **2.** en posant $x=100$.

$$(100-1)^2+4\times 100=(100+1)^2\ .$$

4. Choisir $x=200$.

$$(200-1)^2+4\times 200=(200+1)^2\ ;$$
$$\text{donc}\quad 199^2+800=(201)^2\ .$$

79 ✸ **Tout s'explique !**

1. Calculer :

$A = 71 \times 69 - 72 \times 68$;

$B = 261 \times 259 - 262 \times 258$;

$C = 1\,431 \times 1\,429 - 1\,432 \times 1\,428$.

Que remarque-t-on ?

2. Comment expliquer ce curieux résultat ?

Conseil : appeler $(x+1)$ le premier nombre de chaque expression.

79 ✸ **1.** $A = B = C = 3$.

2. $(x+1)(x-1) - (x+2)(x-2)$

$= x^2 - 1 - (x^2 - 4) = 3.$

Suggestion

On peut prolonger cet exercice en posant la question suivante :

« Compléter les deux calculs ci-dessous afin d'obtenir toujours le même résultats :

$D = 151 \times \ldots - \ldots \times \ldots$

$E = \ldots \times \ldots - \ldots \times 2\,178$. »

Réponse

$D = 151 \times \mathbf{149} - \mathbf{152} \times \mathbf{148}$;

$E = \mathbf{2\,181} \times \mathbf{2\,179} - \mathbf{2\,182} \times 2\,178$.

80 ✸ **Curiosité**

1. Vérifier les égalités suivantes :

$5^2 - 4^2 = 5 + 4$;

$12^2 - 11^2 = 12 + 11$;

$38^2 - 37^2 = 38 + 37$.

2. Compléter la conjecture suivante :

La différence des carrés de deux nombres ... est égale à la ... de ces deux nombres.

3. Démontrer ce résultat général.

80 ✸ **1.** $5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9$;

$12^2 - 11^2 = 12 + 11 = 23$;

$38^2 - 37^2 = 38 + 37 = 75$;

$124^2 - 123^2 = 124 + 123 = 247$.

2. La différence des carrés de deux nombres **entiers consécutifs** est égale à la **somme** de ces deux nombres.

3. $x^2 - (x-1)^2 = [x + (x-1)][x - (x-1)]$

$= x + (x-1)$;

x et $x-1$ sont bien les notations de deux entiers consécutifs si x désigne un entier.

Suggestion

On peut prolonger cet exercice en posant la question suivante :

« Compléter et vérifier l'égalité du même type :

$5\,678^2 - \ldots = \ldots + \ldots$. »

Réponse

$5\,678^2 - 5\,677^2 = 5\,678 + 5\,677 = 11\,355$.

93 *Extraits du brevet* ***Grenoble 2000*** *et* ***2002***

Exercice 1

On considère l'expression : $D = (3x-5)^2 - 16$.

1. Développer D .

2. Factoriser D .

3. Calculer D pour $x = \frac{1}{3}$.

Exercice 2

On considère l'expression :

$A = (2x-3)^2 - (2x-3)(x-2)$.

1. Développer et réduire A .

2. Factoriser A .

3. Calculer A pour $x = 2$.

93 ***Exercice 1***

1. $D = 9x^2 - 30x + 9$.

2. *Commentaire* : cette question mérite l'attention, car certains élèves peuvent être tentés d'écrire :

$D = 3(3x^2 - 10x + 3)$.

C'est donc l'occasion de préciser que, chaque fois que cela est possible, les facteurs doivent être du premier degré.

Réponse

$D = (3x - 5 + 4)(3x - 5 - 4)$

$= (3x-1)(3x-9)$.

On peut éventuellement écrire :

$D = 3(3x-1)(x-3)$.

3. Choisir l'expression factorisée.

Pour $x = \frac{1}{3}$, $D = \left(3 \times \frac{1}{3} - 1\right)\left(3 \times \frac{1}{3} - 9\right) = 0$.

Exercice 2

1. $A = 4x^2 - 12x + 9 - (2x^2 - 4x - 3x + 6)$

$= 2x^2 - 5x + 3$.

2. $A = (2x-3)[2x - 3 - (x-2)]$

$= (2x-3)(x-1)$.

3. On peut prendre, au choix, l'expression développée ou l'expression factorisée.

Pour $x = 2$, $A = 2(2)^2 - 5 \times 2 + 3 = 1$.

94 *Extrait du brevet* ***Poitiers 1998***

1. Factoriser :

a. $9-12x+4x^2$; **b.** $(3-2x)^2-4$.

2. En déduire une factorisation de

$$E=(9-12x+4x^2)-4 .$$

3. Montrer que, pour $x=\frac{3}{2}$, E est un entier.

94 **1. a.** $(3-2x)^2$.

b. $(5-2x)(1-2x)$.

2. $E=(9-12x+4x^2)-4$

$=(3-2x)^2-4$

$=(5-2x)(1-2x)$.

3. Choisir l'expression factorisée.

Pour $x=\frac{3}{2}$, $E=\left(5-2\times\frac{3}{2}\right)\left(1-2\times\frac{3}{2}\right)$;

$E=2\times(-2)=-4$.

-4 est bien un entier.

95 *Extrait du brevet* ***Amiens 1997***

1. Développer et réduire : $D=(a+5)^2-(a-5)^2$.

2. Sans utiliser la calculatrice et en se servant de la question **1.**, trouver la valeur de $10\,005^2-9\,995^2$.
(*Indiquer les étapes de calcul.*)

95 **1.** $D=a^2+10a+25-(a^2-10a+25)$

$=20a$.

2. Établir le lien avec le **1.** en posant $a=10\ 000$.

$(10\ 000+5)^2-(10\ 000-5)^2=20\times 10\ 000$

$=200\ 000$.

96 *Extrait du brevet* ***Bordeaux 2002***

1. Développer et réduire l'expression :

$$P=(x+12)(x+2) .$$

2. Factoriser l'expression : $Q=(x+7)^2-25$.

3. ABC est un triangle rectangle en A : x désigne un nombre positif : $BC=x+7$; $AB=5$.

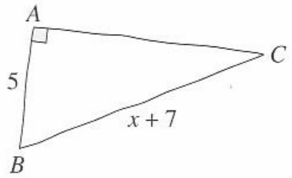
Faire un schéma et montrer que :

$$AC^2=x^2+14x+24 .$$

96 **1.** $P=x^2+14x+24$.

2. $Q=(x+12)(x+2)$.

3.



Le triangle ABC étant rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2=BC^2-AB^2$

$AC^2=(x+7)^2-5^2$

$AC^2=Q$, or $Q=P$, donc $AC^2=P$.

D'après le **1.**, $P=x^2+14x+24$, donc :

$$AC^2=x^2+14x+24 .$$