5

Systèmes d'équations

Vérifier ses acquis
- fiche 10 p. 297
- fiche 11 p. 298
- chapitre 8 p. 149

TEST de démarrage

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 Réduire une expression

La forme réduite de l'expression $3x + 4 - (5x - 7) + 1$ est ...

a. $-2x - 2$ **b.** $-2x - 4$ **c.** $-2x + 12$

2 Résoudre une équation

Pour résoudre l'équation $3x + 5 = x - 2$, on peut écrire ...

a.	**b.**	**c.**
$3x + x = -2 + 5$	$3x - x = -2 - 5$	$2x + 5 = -2$
$4x = 3$	$2x = -7$	$2x = -7$
$x = 0{,}75$	$x = -9$	$x = -3{,}5$
0,75 est la solution	-9 est la solution	$-3{,}5$ est la solution

3 Tester une égalité

L'égalité $3x - 5y - 7 = 6$ est vraie pour ...

a. $x = 1$ et $y = 2$ **b.** $x = 1$ et $y = -2$ **c.** $x = -2$ et $y = 1$

4 Exprimer « en fonction de »

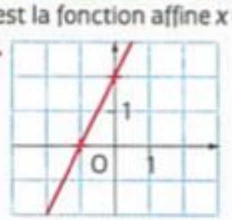
x et y désignent deux nombres tels que $2x - y = 1$. Alors ...

a. $y = 2x - 1$ **b.** $y = 1 - 2x$ **c.** $y = -2x - 1$

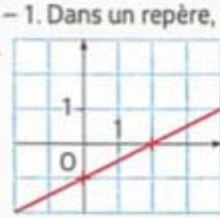
5 Représenter graphiquement une fonction affine

f est la fonction affine $x \mapsto 0{,}5x - 1$. Dans un repère, sa représentation graphique est ...

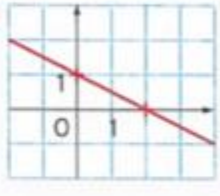
a.



b.



c.



Interprétation graphique

4 Avec des droites

Vocabulaire

Le **quintuple** d'un nombre est égal à cinq fois ce nombre.

Jade doit construire un rectangle tel que :

(1) son demi-périmètre mesure 6 cm ;

(2) si au quintuple de sa largeur on soustrait le triple de sa longueur, on trouve 2 cm.

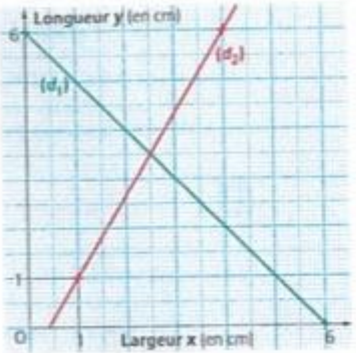
a. On note x la largeur et y la longueur, en cm, de ce rectangle.
Traduire **(1)** et **(2)** par un système de deux équations d'inconnues x et y.

b. Jade exprime y en fonction de x à l'aide de chaque équation. Elle trouve $y = 6 - x$ avec la première équation. Quelle expression trouve-t-elle avec la deuxième équation ?

c. Dans le repère ci-contre, Jade a représenté graphiquement chacune des relations obtenues : comment a-t-elle procédé ?

d. Lire sur le graphique la solution du système. Vérifier par le calcul.

e. Indiquer à Jade les dimensions du rectangle qu'elle doit construire.



Sciences en construction

Il y a un peu plus de 2 000 ans, les Chinois connaissaient des méthodes pour résoudre les systèmes d'équations.
Voici l'un des problèmes qu'ils étudiaient :

> Deux gerbes de poids x valent, en sus de l'unité, une gerbe de poids y.
> Trois gerbes de poids y valent, en sus de l'unité, une gerbe de poids z,
> et quatre gerbes de poids z valent, en sus de l'unité, une gerbe de poids x.
> Quel est le poids d'une gerbe de chaque récolte ?

a. Pour résoudre ce problème, les Chinois écrivaient les trois équations suivantes :

$2x = 1 + y$; $3y = 1 + z$; $4z = 1 + x$.

Expliquer alors l'expression « *en sus de l'unité* ».

b. Vérifier que pour $x = \frac{17}{23}$, $y = \frac{11}{23}$ et $z = \frac{10}{23}$, les trois égalités sont vraies.

1 Systèmes de deux équations à deux inconnues

DÉFINITION

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
où a, b, c, a', b', c' désignent des nombres donnés.

DÉFINITIONS

- **Une solution** d'un tel système est **un couple** $(x\,;\,y)$ pour lequel les deux équations sont **vérifiées simultanément**.
- **Résoudre** un système, c'est trouver tous les couples solutions.

En classe de Troisième, **les systèmes que vous aurez à résoudre auront toujours un seul couple solution**. En classe de Seconde, vous rencontrerez d'autres cas (pour un avant-goût, voir les exercices 72 et 73, page 102).

Exemple : $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues x et y.

- Pour $x = 1$ et $y = 3$:
$2x - y = 2 \times 1 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $(1\,;\,3)$ ne vérifie pas la première équation ;
$x + y = 1 + 3 = 4$ donc $(1\,;\,3)$ vérifie la deuxième équation.
Donc le couple $(1\,;\,3)$ **n'est pas** solution du système.
- Pour $x = 3$ et $y = 1$:
$2x - y = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$ donc $(3\,;\,1)$ vérifie la première équation ;
$x + y = 3 + 1 = 4$ donc $(3\,;\,1)$ vérifie la deuxième équation.
Donc le couple $(3\,;\,1)$ **est** solution du système.

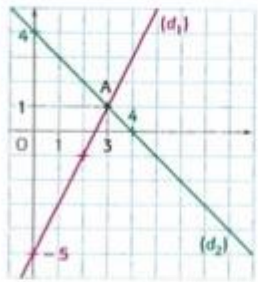
Dans un couple, **l'ordre des deux nombres écrits est important** ! Les couples $(1\,;\,3)$ et $(3\,;\,1)$ sont différents.

2 Interprétation graphique : exemple

(S) est le système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$.

La première équation s'écrit aussi : $-y = 5 - 2x$ c'est-à-dire $y = 2x - 5$.
La deuxième équation s'écrit aussi : $y = -x + 4$. Ainsi :

> Résoudre le système **(S)** revient à trouver, dans un repère, les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2) qui représentent graphiquement les fonctions affines $x \mapsto 2x - 5$ et $x \mapsto -x + 4$.



Sur le graphique ci-contre, il semble que (d_1) et (d_2) sont sécantes au point A $(3\,;\,1)$. Il faut **vérifier ensuite, par le calcul**, que le couple lu sur le graphique est bien solution du système. Or ici, cette vérification a été faite à l'exemple du paragraphe 1, donc $(3\,;\,1)$ est le couple solution du système **(S)**.

1 Résoudre algébriquement un système

ÉNONCÉ

Résoudre le système $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-y=3 \end{cases}$.

SOLUTION

❶ La première équation s'écrit :

$x=8-2y$.

❷ En reportant cette expression de x dans la deuxième équation, on obtient :

$3(8-2y)-y=3$.

❸
$$24-6y-y=3$$
$$24-7y=3$$
$$-7y=-21$$
$$y=\frac{-21}{-7}=3$$

❹ On remplace y par 3 dans $x=8-2y$ et on obtient : $x=8-2\times3=2$.

❺ On vérifie que, pour $x=2$ et $y=3$:
$x+2y=2+2\times3=8$ et $3x-y=3\times2-3=3$.

❻ Donc le couple $(2\ ;\ 3)$ est le couple solution de ce système.

Pour résoudre un système, on se ramène à la résolution d'**une équation à une seule inconnue**. Pour cela, on peut utiliser la **méthode par substitution**.

❶ On exprime une inconnue en fonction de l'autre à l'aide de l'une des deux équations.

❷ On reporte cette expression dans l'autre équation.

❸ On résout l'équation à une inconnue obtenue.

❹ On reporte cette valeur dans l'expression obtenue à l'étape ❶.

❺ Les systèmes étudiés ayant toujours un seul couple solution, cette étape permet seulement de vérifier que l'on n'a pas commis d'erreur de calcul.

❻ On conclut.

SUR LE MÊME MODÈLE *Exercices 13 à 19 page 97*

2 Résoudre graphiquement un système

ÉNONCÉ

(S) est le système $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x+2y=0 \end{cases}$.

a. Exprimer y en fonction de x à l'aide de chacune des deux équations.

b. Dans un repère, représenter graphiquement les fonctions affines associées au système.

c. Lire graphiquement la solution du système (S) et vérifier par le calcul.

SOLUTION

a. La première équation $3x+y=5$ s'écrit :

$y=5-3x$

c'est-à-dire $y=-3x+5$.

La deuxième équation $x+2y=0$ s'écrit :

$2y=-x$

c'est-à-dire $y=-\frac{1}{2}x$.

• On soustrait $3x$ à chaque membre :
$\cancel{3x}+y-\cancel{3x}=5-3x$

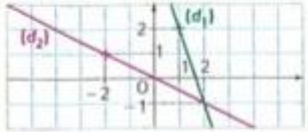
• On soustrait x à chaque membre :
$\cancel{x}+2y-\cancel{x}=0-x$,

puis on multiplie chaque membre par $\frac{1}{2}$:
$\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}y=\frac{1}{2}\times(-x)$.

Suite de la solution page suivante.

Suite de la solution

b. Les droites (d_1) et (d_2) représentent les fonctions affines $x\longmapsto-3x+5$ et $x\longmapsto-\frac{1}{2}x$.



Pour tracer (d_1), on a utilisé les points de coordonnées $(1\ ;\ 2)$ et $(2\ ;\ -1)$.
Pour tracer (d_2), on a utilisé les points de coordonnées $(0\ ;\ 0)$ et $(-2\ ;\ 1)$.

c. La solution du système est donnée par les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2). On lit : $(2\ ;\ -1)$.
On vérifie que ce couple est solution du système **(S)** :
$3\times2+(-1)=5$ et $2+2(-1)=0$.
Donc le couple $(2\ ;\ -1)$ est le couple solution du système **(S)**.

Une lecture graphique conduit souvent à une solution approchée du système (imprécision des tracés, coordonnées non entières...). **Aussi faut-il toujours vérifier la validité ou non de cette lecture par le calcul.**

Ne pas oublier de conclure.

SUR LE MÊME MODÈLE *Exercices 34 à 36 page 98*

3 Déterminer une fonction affine

ÉNONCÉ

f est une fonction affine telle que $f(4)=6$ et $f(7)=-9$. Déterminer l'expression de $f(x)$.

SOLUTION

f est une fonction affine, donc $f(x)=ax+b$.
$f(4)=6$ s'écrit $a\times4+b=6$
$f(7)=-9$ s'écrit $a\times7+b=-9$
On résout le système $\begin{cases} 4a+b=6 \\ 7a+b=-9 \end{cases}$.
La première équation s'écrit $b=6-4a$.
On reporte dans la deuxième équation :

$7a+6-4a=-9$,

c'est-à-dire successivement :
$3a+6=-9$; $3a=-15$, soit $a=-5$.
On remplace a par -5 dans $b=6-4a$:

$b=6-4(-5)=26$.

On vérifie que, pour $a=-5$ et $b=26$:

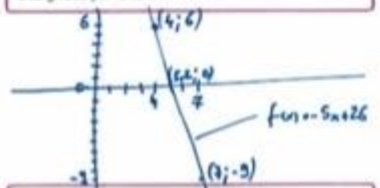
$4a+b=4(-5)+26=6$

et $7a+b=7(-5)+26=-9$.

Le couple $(-5\ ;\ 26)$ est donc la solution du système. Donc, quel que soit le nombre x :

$f(x)=-5x+26$.

Dans l'écriture $f(x)=ax+b$, x désigne cette fois la variable de la fonction f. Les inconnues sont désignées par a et b.



Une autre méthode de recherche de cette fonction affine est proposée dans le chapitre 8, à l'exercice résolu 2 page 150.

SUR LE MÊME MODÈLE *Exercices 29 et 30 page 97*

4 Traiter une situation conduisant à un système

ÉNONCÉ

Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums ou des boîtes.
Léa achète six boîtes et cinq albums et paie 57 €.
Hugo achète trois boîtes et sept albums et paie 55,50 €.
Quel est le prix d'une boîte ? Quel est le prix d'un album ?

SOLUTION

1 Choix des inconnues
On note x le prix d'une boîte et y le prix d'un album, en euros.

2 Mise en équation
Léa achète six boîtes et cinq albums pour 57 € donc : $6x + 5y = 57$.
Hugo achète trois boîtes et sept albums pour 55,50 € donc : $3x + 7y = 55{,}5$.
Les achats de Léa et d'Hugo conduisent au système **(S)** :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55{,}5 \end{cases}$$

3 Résolution du système
On multiplie chaque membre de l'équation **(2)** par 2. Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 6x + 14y = 111 \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$$6x + 14y - (6x + 5y) = 111 - 57$$
$$\cancel{6x} + 14y - \cancel{6x} - 5y = 111 - 57$$
$$9y = 54$$

c'est-à-dire $y = 6$.
On remplace y par 6 dans l'équation **(1)** :

$$6x + 5 \times 6 = 57$$

c'est-à-dire $6x + 30 = 57$
$6x = 27$
$x = 4{,}5$.

On vérifie que, pour $x = 4{,}5$ et $y = 6$:
$6x + 5y = 6 \times 4{,}5 + 5 \times 6 = 57$,
et $3x + 7y = 3 \times 4{,}5 + 7 \times 6 = 55{,}5$.
Donc la solution du système **(S)** est le couple $(4{,}5 ; 6)$.

4 Retour à la situation
Chaque boîte coûte 4,50 € et chaque album coûte 6 €.

> Lors de l'étude de telles situations, il est conseillé de suivre les étapes :
> 1 choix des inconnues ;
> 2 mise en équation ;
> 3 résolution d'un système ;
> 4 retour à la situation.

> On observe les termes des équations : on remarque que $6x = 2 \times 3x$.

> On dit que l'on résout ce système avec la **méthode par combinaison** : la nouvelle équation obtenue $6x + 14y = 111$ et l'équation **(1)** ont le même « terme en x » : $6x$.
> Par soustraction, on élimine les termes en x et on obtient une équation à une seule inconnue y.

Méthode de l'addition

$$\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55{,}5 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ (-2) \end{vmatrix}$$

$$6x + 5y = 57$$
$$-6x - 14y = -111$$
$$-9y = -54$$
$$\underline{y = 6}$$

dans (1) => $6x + 30 = 57$
$6x = 27$
$\underline{x = 4{,}5}$

SUR LE MÊME MODÈLE **Exercices 27 et 28 page 97**

Appliquer la résolution d'un système

ÉNONCÉ *Brevet 2007*

a. Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 4x + y = 24 \end{cases}$

b. On considère un parallélépipède rectangle.
Si l'on prend le double de sa largeur et que l'on ajoute le triple de sa longueur, on trouve 27 cm.
Si l'on prend le quadruple de sa largeur et que l'on ajoute sa longueur, on trouve 24 cm.
Déterminer la largeur et la longueur de ce parallélépipède rectangle.

> **Le jour du brevet**
> Il est fréquent de constater que l'étude de la situation à la question **b.** se ramène au système donné à la question **a.**

SOLUTION

a. La deuxième équation s'écrit : $y = 24 - 4x$.
On reporte cette expression dans la première équation :

$$2x + 3(24 - 4x) = 27$$

c'est-à-dire : $2x + 72 - 12x = 27$
$-10x + 72 = 27$
$-10x = -45$

$$x = \frac{-45}{-10} = 4{,}5$$

On remplace x par 4,5 dans $y = 24 - 4x$:
$y = 24 - 4 \times 4{,}5 = 24 - 18 = 6$.
On vérifie que pour $x = 4{,}5$ et $y = 6$:
$2x + 3y = 2 \times 4{,}5 + 3 \times 6 = 9 + 18 = 27$,
$4x + y = 4 \times 4{,}5 + 6 = 18 + 6 = 24$.
Donc le système a pour seule solution le couple $(4{,}5 ; 6)$.

b. • On note x la largeur et y la longueur, en cm, du parallélépipède rectangle.
• Le double de la largeur plus le triple de la longueur donne 27 cm donc : $2x + 3y = 27$.
Le quadruple de la largeur plus la longueur donne 24 cm donc $4x + y = 24$.
Le couple $(x ; y)$ est donc solution du système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 4x + y = 24 \end{cases}$$

• Donc d'après la question 1 :
$x = 4{,}5$ et $y = 6$.

• Ainsi le parallélépipède rectangle a pour largeur 4,5 cm et pour longueur 6 cm.

> **Réfléchir**
> Avant de se lancer dans la résolution, il est conseillé de réfléchir et de se poser des questions du type :
> • « Est-il préférable d'exprimer y en fonction de x ou x en fonction de y ? »,
> • « à l'aide de la 1re ou de la 2e équation ? »
> Ici, il est aisé d'écrire y en fonction de x avec la 2e équation.

> **Rédiger**
> Il est essentiel sur sa copie de marquer les différentes étapes lors de la résolution d'un problème :
> • choix des inconnues ;
> • mise en équation ;
> • résolution du système ;
> • retour à la situation.

POUR S'EXERCER **Exercice 32 page 98**

EXERCICES DE BASE

Systèmes d'équations

1 Voici une liste de couples :
$(-1\,;2)$, $(2\,;-1)$, $(-13\,;9)$, $(7\,;-3)$.
Parmi ces couples, relever :

a. des solutions de l'équation $2x+3y=1$;

b. des solutions de l'équation $3x+5y=6$;

c. une solution du système $\begin{cases}2x+3y=1\\3x+5y=6\end{cases}$.

2 **a.** Recopier et compléter chaque case du tableau par « vraie » ou « fausse ».

	L'égalité $2x-y=3$ est …	L'égalité $x+4y=-3$ est …
$x=4$ et $y=5$		
$x=-1$ et $y=1$		
$x=1$ et $y=-1$		
$x=-3$ et $y=0$		

b. En déduire une solution du système $\begin{cases}2x-y=3\\x+4y=-3\end{cases}$.

3 Dans chaque cas, le couple $(-4\,;3)$ est-il solution du système ?

a. $\begin{cases}x+\dfrac{5}{3}y=1\\-\dfrac{3}{8}x-2y=-\dfrac{9}{2}\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}y-3x=15\\-3x+4y=0\end{cases}$

4 Parmi les couples $(4\,;-10)$, $(3\,;18)$, $(-0{,}5\,;-0{,}5)$, lequel est solution du système $\begin{cases}7x+3y=-2\\-5x+y=3\end{cases}$?

5 Quatre sodas et cinq jus de fruits coûtent 16,40 €.
On peut traduire cette phrase par : $4x+5y=16{,}4$.
Que représentent alors x et y ?

6 Corentin parcourt 700 km, d'abord à la vitesse moyenne de 65 km/h et ensuite à 80 km/h.
On peut traduire cette phrase par $65x+80y=700$.
Que représentent alors x et y ?

7 Yuna a acheté neuf CD mais a revendu cinq BD. Elle a ainsi réalisé un bénéfice de 7,20 €.
On peut traduire cette phrase par $5a-9b=7{,}2$.
Que représentent alors a et b ?

8 **(S)** est le système $\begin{cases}5x-y=15\\x+2y=4\end{cases}$.
Quelle équation est-il préférable d'utiliser pour exprimer x en fonction de y ? y en fonction de x ?
Donner ces expressions.

9 Émilien explique : « J'ai ajouté le triple du premier nombre au second et j'ai trouvé 2. »
Anissa : « J'ai ajouté ton premier nombre et le double de ton second nombre ; j'ai trouvé 9 ».

a. On note x le premier nombre et y le second nombre.
Traduire la phrase d'Émilien, puis la phrase d'Anissa, par une équation.

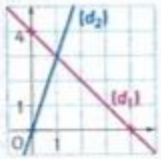
b. Vérifier qu'alors $y=2-3x$.
En déduire une équation à une seule inconnue x.

c. En déduire la valeur de y.

d. Conclure pour les nombres choisis par Émilien et Anissa.

Interprétation graphique

10 Pour résoudre le système :
$\begin{cases}x+y=4\\3x-y=0\end{cases}$
Maëlle a tracé deux droites dans le repère ci-contre.

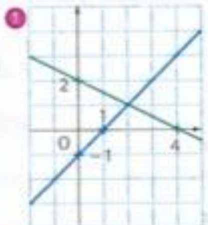


a. Quelles expressions de y en fonction de x a-t-elle utilisées ?

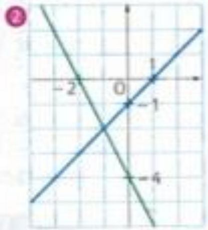
b. Lire sur le graphique la solution du système.
Vérifier par le calcul.

11 **(S)** est le système $\begin{cases}2x+y=-4\\x-y=1\end{cases}$.
L'un de ces graphiques est associé à ce système ; lequel ?
Lire la solution du système et vérifier par le calcul.

1



2



EXERCICES D'APPLICATION

Systèmes d'équations

12 Trouver les nombres manquants pour que le système ci-dessous admette pour solution le couple $(2\,;-5)$.
$\begin{cases}6x-y=\ldots\\\ldots x+2y=4\end{cases}$

13 Résoudre le système $\begin{cases}x-12y=16\\5x-4y=24\end{cases}$.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 92.*

Pour les exercices 14 à 19
Résoudre le système.

14 $\begin{cases}x+4y=14\\x+11y=35\end{cases}$ **15** $\begin{cases}4x+y=-14\\3x+2y=-8\end{cases}$

16 $\begin{cases}-2x+5y=-53\\4x+y=7\end{cases}$ **17** $\begin{cases}0{,}3x+0{,}2y=9\\x+4y=10\end{cases}$

18 $\begin{cases}x-11=y+11\\x-y=2(y+19)\end{cases}$ **19** $\begin{cases}y-2x=3\\5x-3y=5\end{cases}$

20 **(S)** désigne le système $\begin{cases}5x-2y=37\\3x+2y=19\end{cases}$.

a. Si le couple $(x\,;y)$ est solution du système, donner la valeur de $5x-2y+(3x+2y)$.

b. En déduire une équation où x est la seule inconnue.
Résoudre cette équation.

c. Terminer la résolution du système **(S)**.

21 **(S)** désigne le système $\begin{cases}4x+2y=2\\4x+5y=-13\end{cases}$.

a. Si le couple $(x\,;y)$ est solution du système, donner la valeur de $4x+5y-(4x+2y)$.

b. En déduire une équation où y est la seule inconnue.
Résoudre cette équation.

c. Terminer la résolution du système **(S)**.

22 **(S)** désigne le système $\begin{cases}3x+4y=5\\5x-2y=17\end{cases}$.

a. Si le couple $(x\,;y)$ est solution du système, donner la valeur de $3x+4y+2(5x-2y)$.

b. En déduire une équation où x est la seule inconnue.
Résoudre cette équation.

c. Terminer la résolution du système **(S)**.

Pour les exercices 23 à 26
Résoudre le système.

23 $\begin{cases}4x-3y=32\\-2x+3y=2\end{cases}$ **24** $\begin{cases}5x+4y=60\\-5x-3y=105\end{cases}$

25 $\begin{cases}6x+7y=7\\-3x+2y=-31\end{cases}$ **26** $\begin{cases}-2x+3y=5\\5x+9y=-7\end{cases}$

27 La recette des entrées au musée a été un certain jour de 1 880 € pour 120 adultes et 55 enfants.
Le lendemain, les prix d'entrée sont réduits de 25 % pour les adultes et 50 % pour les enfants. La recette s'est élevée à 3 120 € pour 320 adultes et 60 enfants.
Quels sont les prix d'entrée non réduits par adulte et par enfant ?

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 4, page 94.*

28 Un zoo propose deux tarifs d'entrée : un tarif pour les adultes et un autre pour les enfants.
Un groupe constitué de quatre enfants et d'un adulte paie 22 euros.
On peut traduire ces données par l'équation à deux inconnues :
$4x+y=22$ notée (E_1).

a. Que représente l'inconnue x et que représente l'inconnue y dans cette équation ?

b. Un autre groupe constitué de six enfants et de trois adultes paie 42 euros.
Traduire cette information par une seconde équation notée (E_2), dépendant des deux inconnues x et y.

c. Résoudre le système constitué des deux équations (E_1) et (E_2) précédentes.

d. Quel est le prix d'une entrée pour un enfant et quel est celui d'une entrée pour un adulte ?

→ *Brevet 2006*

29 f est une fonction affine telle que :
$f(1)=1$ et $f(-1)=5$.
Déterminer l'expression de $f(x)$.

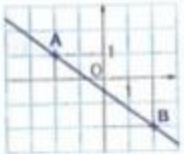
Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 3, page 93.*

30 g est une fonction affine telle que l'image de -2 est 5 et l'image de 2 est -1.

a. Déterminer l'expression de $g(x)$.

b. Dans un repère, représenter graphiquement la fonction g.

31 La droite (AB) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction affine f.
Résoudre un système pour trouver l'expression de $f(x)$.



32 **a.** Résoudre le système $\begin{cases} x+y=20 \\ 3x-4y=11 \end{cases}$

b. Fred a joué vingt parties d'un jeu dont la règle est la suivante :
– il n'y a pas de partie nulle ;
– si on gagne une partie, on gagne 3 euros ;
– si on perd une partie, on perd 4 euros.
À la fin des vingt parties, Fred a gagné 11 euros.
Combien Fred a-t-il perdu de parties ?
Justifier votre réponse.

→ *Brevet 2006*

Conseil : *se reporter à l'atelier, page 95.*

33 **a.** Résoudre le système $\begin{cases} x+y=32 \\ 3x+5y=125 \end{cases}$

b. Sarah a dessiné des triangles et des pentagones (polygones ayant cinq côtés). Elle en a compté en tout 32 ; elle a également compté tous les côtés : elle en a trouvé 125.
Que peut-on penser des comptes de Sarah ?

Interprétation graphique

34 (S) est le système $\begin{cases} 4x+3y=-6 \\ 2x+y=-3{,}5 \end{cases}$

a. Représenter graphiquement ce système.
Lire une solution approchée du système.

b. Résoudre algébriquement le système (S) et comparer avec la réponse donnée au **a**.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 2, page 92.*

35 (S) est le système $\begin{cases} 5x+2y=12 \\ x+2y=8 \end{cases}$

a. Exprimer y en fonction de x à l'aide de chaque équation.

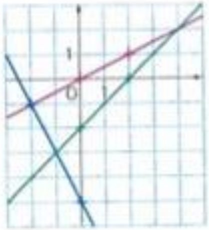
b. Dans un repère, représenter graphiquement les fonctions affines associées à ce système.

c. Lire graphiquement la solution du système (S) et vérifier par le calcul.

36 Les points de coordonnées $(x\,;y)$ tels que :
• $y=0{,}5x$ sont représentés ci-après par la droite rouge ;
• $y=x-2$ sont représentés par la droite verte ;
• $y=-2x-5$ sont représentés par la droite bleue.

On donne trois systèmes :
• $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=-5 \end{cases}$ rouge bleue
• $\begin{cases} x-2y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ rouge vert
• $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=-5 \end{cases}$ vert bleue

Lire graphiquement la solution de chaque système, puis vérifier par le calcul.



37 Dorian a résolu le système $\begin{cases} 6x+2y=3 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ et a trouvé $(0\,;0{,}5)$ pour couple solution.

a. Représenter graphiquement ce système et dire si vous êtes d'accord avec Dorian.

b. Si vous êtes en désaccord, lire le couple solution, puis vérifier par le calcul.

Calcul mental et réfléchi

Pour les exercices 38 à 41
Résoudre mentalement le système.

38 $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=4 \\ x+y=18 \end{cases}$ **39** $\begin{cases} x-y=1 \\ y-3=0 \end{cases}$

40 $\begin{cases} 2x+3y=19 \\ 2x+4y=24 \end{cases}$ **41** $\begin{cases} x=3y-7 \\ 4y=12 \end{cases}$

42 Trouver **mentalement** deux nombres :
a. dont la somme est 80 et la différence est 4 ;
b. dont la somme est 4 et la différence est 80.

43 Antoine et Sophie discutent.
Sophie : « Si tu me donnes ☐ cédéroms, j'en aurai autant que toi. »
Antoine : « Si tu me donnes ☐ cédéroms, j'en aurai ☐ fois plus que toi. »

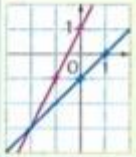
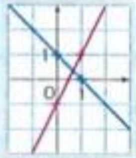
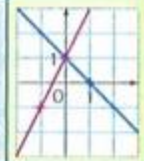
a. Retrouver les nombres manquants à l'aide de la mise en équation de ce problème :

s nombre de cédéroms de Sophie
a nombre de cédéroms d'Antoine
$\begin{cases} a-3=s+3 \\ a+5=2(s-5) \end{cases}$

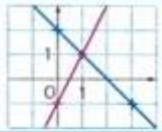
b. Sophie a 21 cédéroms. Calculer **mentalement** le nombre de cédéroms d'Antoine.

QCM POUR S'ÉVALUER

Pour ces questions, une seule réponse est exacte.

	a	b	c
44 La solution du système $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$ est le couple…	$(5\,;-4)$	$(-5\,;4)$	$(4\,;-5)$
45 Pour résoudre le système $\begin{cases} 7x-y=1 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$ on peut commencer par écrire…	$y=7x-1$, puis $4x+3(7x-1)=2$	$y=1-7x$, puis $4x+3(1-7x)=2$	$y=1-7x$, puis $4(1-7x)+3y=2$
46 Pour résoudre le système $\begin{cases} 4x-y=3 \\ -x+y=5 \end{cases}$ on peut commencer par écrire…	$4x-y+(-x+y)=2$	$4x-y-(-x+y)=2$	$4x-y+(-x+y)=8$
47 Pour résoudre le système $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 7x-10y=1 \end{cases}$ on peut commencer par écrire…	$2(2x+5y)-(7x-10y)=5$	$7x-10y+2(2x+5y)=7$	$7x-10y-2(2x+5y)=-5$
48 Quatre feutres et cinq classeurs coûtent 19,50 €. Six de ces classeurs et sept de ces feutres coûtent 26,70 €. On peut traduire cette situation par le système…	$\begin{cases} 4x+5y=19{,}5 \\ 6x+7y=26{,}7 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+5y=19{,}5 \\ 6y+7x=26{,}7 \end{cases}$	$\begin{cases} 4y+5x=19{,}5 \\ 6y+7x=26{,}7 \end{cases}$
49 Le système $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ est représenté graphiquement dans un repère par…			

Pour ces questions, plusieurs réponses sont exactes.

	a	b	c
50 Pour résoudre le système $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+7y=1 \end{cases}$ on peut commencer par écrire…	$x=1-7y$, puis $2(1-7y)-y=5$	$y=2x-5$, puis $x+7(2x-5)=1$	$2x-y-2(x+7y)=3$
51 Une solution de l'équation $6x-5y=8$ est le couple…	$(3\,;2)$	$(-4{,}6\,;-7)$	$(10{,}1\,;10{,}52)$
52 Ce graphique peut représenter le système… 	$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-x+2 \end{cases}$

Vérifiez vos réponses p. 307.

OBJECTIF BREVET

53 Avec une aide

a. Résoudre le système :
$$\begin{cases} 10x-3y=35 \\ 5x-4y=-20 \end{cases}$$
b. Montrer que les valeurs trouvées pour x et y vérifient la condition suivante :
$$8\left(\frac{x-5}{y-5}\right)=3\left(\frac{x+20}{y+20}\right)$$

Aide
a. Observez que $10x$ est le double de $5x$.
b. Calculez séparément chaque membre.

→ *Brevet 2005*

Sans aide maintenant

54 **a.** Résoudre le système $\begin{cases} 3x+2y=66 \\ x+3y=57 \end{cases}$.
b. Vérifier que pour la solution $(x ; y)$ trouvée, on a :
$$\frac{x}{y}=\frac{4}{5}.$$

55 Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 3x+2y=850 \\ 2x+4y=1\,100 \end{cases}$$
→ *Brevet 2004*

56 Avec une aide

Trouver deux nombres connaissant leur somme 2 003 et leur différence 51.

→ *Brevet 2003*

Aide
Notez x et y les deux nombres cherchés et écrivez un système.

Sans aide maintenant

57 Marie et Anne pratiquent l'équitation.
Marie a pris pendant un trimestre 16 heures de leçon et a fait trois stages d'une journée chacun. Marie a payé 344 €.
Pendant le même trimestre, Anne a pris 18 heures de leçon et a fait seulement deux stages d'une journée chacun. Anne a payé 332 €.
Déterminer le prix d'une heure de leçon et celui d'une journée de stage.

→ *Brevet 2003*

58 Avec une aide

Partie A

1. On considère le tableau de proportionnalité ci-contre.

20	30	$\times a$
70	b	

a. Calculer b.
b. On appelle a le coefficient de proportionnalité. Calculer a.
2. On considère la fonction linéaire f définie par :
$$f: x \mapsto 3{,}5x.$$
Sur une feuille de papier millimétré, tracer la droite (d) représentant la fonction f.
On prendra un repère orthonormé ; l'origine sera placée en bas et à gauche de la feuille ; sur chaque axe, 1 cm représentera 10 unités.

Partie B

1. Dans le repère précédent, placer les points $A(20 ; 70)$ et $B(60 ; 90)$.
2. Déterminer la fonction affine g dont la représentation graphique est la droite (AB).
3. **a.** Résoudre le système $\begin{cases} y=3{,}5x \\ y=0{,}5x+60 \end{cases}$.
b. Que représente le couple $(x ; y)$, solution de ce système, pour les droites (d) et (AB) ?

Partie C

On dispose d'un ressort de 60 mm. Quand on lui suspend une masse de 20 g, il s'allonge de 10 mm.
a. On admet que l'allongement du ressort est toujours proportionnel à la masse accrochée.
Démontrer que la longueur totale du ressort pour une masse de 80 g est 100 mm.
b. On note x la masse suspendue en grammes.
Exprimer l'allongement du ressort en fonction de x.
c. Exprimer la longueur totale du ressort en fonction de x.
d. Sachant que la masse volumique de l'or est 19,5 g/cm³, calculer la masse d'un cube en or de 2 cm d'arête.
e. On suspend ce cube à ce ressort. Déterminer la longueur totale du ressort. Retrouver cette longueur sur le graphique. Faire apparaître les pointillés nécessaires.

→ *Brevet 2007*

Aide
B. 2. Soit on résout un système comme à l'exercice résolu 3 page 93, soit on procède comme à l'exercice résolu 2 page 150.
3. Il est simple ici d'écrire une équation où x est la seule inconnue.
C. d. Ainsi 1 cm³ d'or a une masse de 19,5 g.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Pour les exercices 59 à 62
Résoudre le système.

59 $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=7 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=8 \end{cases}$

60 $\begin{cases} 2x-\frac{8}{3}y=5 \\ 4x-2y=\frac{10}{3} \end{cases}$

61 $\begin{cases} \frac{x}{4}=\frac{y}{3} \\ 5x+4y=8 \end{cases}$

62 $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=5 \\ x-y\sqrt{2}=0 \end{cases}$

63 Une ou deux bosses ?

Dans un troupeau composé de chameaux et de dromadaires, on compte 28 têtes et 45 bosses.
Combien y a-t-il de dromadaires et de chameaux ?

64 Collection de timbres

Colette et François possèdent ensemble 144 timbres de collection.
Si Colette donnait deux timbres à François, alors celui-ci en aurait deux fois plus qu'elle.
Combien Colette et François ont-ils de timbres chacun ?

65 Différence connue

La différence de deux nombres est 15.
Si on ajoute 10 à chacun de ces deux nombres, le plus grand est alors le double du plus petit.
Quels sont ces deux nombres ?

66 Problème d'âges

Pierre a le triple de l'âge de Zoé.
Dans 15 ans, l'âge de Pierre sera le double de l'âge de Zoé.
Quels sont les âges de Pierre et Zoé ?

67 Vitesse

Un cycliste parcourt deux étapes à la même vitesse moyenne. Il boucle la première étape en 1 h 15 min et la deuxième en 1 h 30 min. La deuxième étape fait 4 km de plus que la première.
a. Quelles sont les longueurs des deux étapes ?
b. À quelle vitesse moyenne roule le cycliste ?

68 Division euclidienne

Trouver deux nombres entiers positifs sachant que :
- leur somme est 241 ;
- si l'on divise le plus grand par le plus petit, le quotient est 4 et le reste est 11.

69 Série statistique

Voici les notes de vingt élèves à un test d'informatique noté sur 10.

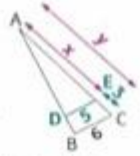
Note	1	4	5	7	9
Effectif	2	x	3	y	4

La moyenne de cette série est 5,9. Trouver x et y.

70 Avec le théorème de Thalès

Les longueurs sont données en cm.
ABC et ADE sont les triangles représentés ci-contre. On sait que :
- les droites (DE) et (BC) sont parallèles,
- DE = 5, EC = 3 et BC = 6.

On note : AE = x et AC = y.



a. Écrire un système dont le couple $(x ; y)$ est solution.
b. Résoudre ce système et donner les longueurs AE et AC.

71 Avec un ordinateur

Dans une même boulangerie :
- Lilou achète deux croissants et un pain au chocolat ; elle paie 2,35 € ;
- Luka achète cinq croissants et deux pains au chocolat ; il paie 5,45 €.

a. Si un croissant coûte 0,50 €, calculer le prix d'un pain au chocolat pour Lilou, puis pour Luka.
b. Avec un tableur, taper la feuille de calcul :

	A	B	C
1		Prix calculé d'un pain au chocolat	
2	Prix d'un croissant	pour Lilou	pour Luka
3	0,5	=2,35-2*A3	
4	0,6		
5	0,7		
6	0,8		
7	0,9		
8	1		

Taper la formule qui convient dans la cellule C3.
Sélectionner la plage B3 : C3 et recopier jusqu'à la ligne 8.
c. Observer les résultats et expliquer pourquoi le prix d'un croissant payé par Lilou et Luka est compris entre 0,70 € et 0,80 €.
d. Maintenant, dans la plage A3 : A13, taper les nombres 0,7 ; 0,71 ; 0,72 ; … ; 0,79 ; 0,8.
Compléter la feuille de calcul et en déduire le prix d'un croissant et le prix d'un pain au chocolat achetés par Lilou et Luka.