

4

Équations et inéquations. Résolution de problèmes

Vérifier ses acquis

- fiche 11 p. 298
- fiche 12 p. 298

TEST de démarrage

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 Connaître le vocabulaire

Un produit est par exemple ...

- a. $3(2x + 5) - 1$ b. $2x + 5$ c. $(2x + 5)(x - 2)$

2 Reconnaître une équation

Une équation est par exemple ...

- a. $(3x - 2)^2 + (4x - 1)(3x - 2)$ b. $\frac{5}{8} - 1 = -\frac{3}{4} : 2$ c. $2(t - 3) = 5t + 1$

3 Reconnaître une solution d'une équation

Une solution de l'équation $4(3 - x) = 2x(x - 1)$ est le nombre ...

- a. 1 b. 2 c. 3

4 Traduire un énoncé

« On choisit un nombre. La somme de 5 et du double de ce nombre est égale au triple de la somme de 1 et de ce nombre. »

Si x désigne le nombre choisi, alors cette situation peut se traduire par l'équation ...

- a. $5 + 2x = 3 \times 1 + x$ b. $5 + 2x = 1 + 3x$ c. $5 + 2x = 3(1 + x)$

5 Tester une inégalité

L'inégalité $x < -2$ est vraie lorsque x prend, par exemple, la valeur ...

- a. -1 b. -2 c. -3

6 Connaître les règles reliant ordre et addition

Si x désigne un nombre relatif tel que $x - 5 > 3$, alors on peut en déduire que ...

- a. $x > -2$ b. $x > 8$ c. $x < 8$

7 Connaître les règles reliant ordre et multiplication

Si x désigne un nombre relatif tel que $-2x < 6$, alors on peut en déduire que ...

- a. $x > -3$ b. $x < -3$ c. $x < 8$

Les réponses détaillées
p. 306 permettent
de mieux comprendre.



1 Équations du premier degré à une inconnue

DÉFINITION

Une équation est dite du premier degré à une inconnue x lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $ax + b = cx + d$ (où a, b, c, d désignent des nombres avec $a \neq c$).

PROPRIÉTÉS

On obtient une nouvelle équation qui a les **mêmes solutions que l'équation initiale** :

- (1) lorsqu'on additionne ou on soustrait un même nombre aux deux membres de cette équation,
- (2) lorsqu'on multiplie ou on divise par un même nombre **non nul** les deux membres de cette équation.

Exemple : résolution de l'équation $5x - 4 = 3x + 2$.

$$5x - 4 = 3x + 2$$

Cette équation est de la forme $ax + b = cx + d$, $a \neq c$.

$$2x - 4 = 2$$

On a soustrait $3x$ à chaque membre (propriété (1)).

$$2x = 6$$

On a ajouté 4 à chaque membre (propriété (1)).

$$x = 3$$

On a divisé par 2 les deux membres (propriété (2)).

Conclusion : 3 est la solution de l'équation $5x - 4 = 3x + 2$.

2 Équations « produit nul »

a Produit nul

PROPRIÉTÉS

- Si l'un au moins des facteurs d'un produit est nul, **alors** le produit est nul. Autrement dit : **si** $A = 0$ ou $B = 0$, **alors** $A \times B = 0$.
- Si un produit est nul, **alors** l'un au moins de ses facteurs est nul. Autrement dit : **si** $A \times B = 0$, **alors** $A = 0$ ou $B = 0$.

b Équation $(ax + b)(cx + d) = 0$

PROPRIÉTÉ

a, b, c, d désignent des nombres.
Les solutions de l'équation « produit nul » $(ax + b)(cx + d) = 0$ sont les nombres x tels que :
 $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Exemple : résolution de l'équation $(2x - 6)(3x + 4) = 0$

Les solutions de l'équation $(2x - 6)(3x + 4) = 0$ sont les nombres x tels que :

$$2x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 4 = 0$$

$$2x = 6 \quad \text{ou} \quad 3x = -4$$

À savoir :

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{4}{3}$$

Conclusion : 3 et $-\frac{4}{3}$ sont les solutions de l'équation $(2x - 6)(3x + 4) = 0$.

3 Inéquations du premier degré à une inconnue

a Vocabulaire

DÉFINITIONS

- Une **inéquation à une inconnue x** est une inégalité qui est soit vraie, soit fausse, selon les valeurs de x .
- Les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vraie sont les **solutions** de l'inéquation.
- **Résoudre** une inéquation, c'est trouver **toutes** ses solutions.

Exemple : on considère l'inéquation $-2x > 1$.

- Pour $x = 3$, $-2x = -2 \times 3 = -6$ et $-6 < 1$, donc 3 **n'est pas** une solution de l'inéquation $-2x > 1$.
- Pour $x = -1$, $-2x = -2 \times (-1) = 2$ et $2 > 1$, donc -1 **est** une solution de l'inéquation $-2x > 1$.

b Inéquations du premier degré

DÉFINITION

Une inéquation est dite du premier degré à une inconnue x lorsqu'elle peut s'écrire sous l'une des formes $ax + b < cx + d$, $ax + b > cx + d$, $ax + b \leq cx + d$, $ax + b \geq cx + d$ (où a, b, c, d désignent des nombres avec $a \neq c$).

PROPRIÉTÉS

On obtient une nouvelle inéquation qui a les **mêmes solutions que l'inéquation initiale** :

- (1) lorsqu'on additionne ou on soustrait un même nombre aux deux membres de cette inéquation,
- (2) lorsqu'on multiplie ou on divise les deux membres de cette inéquation :
 - par un même nombre **strictement positif** en conservant le sens de l'inégalité ;
 - par un même nombre **strictement négatif** mais en changeant le sens de l'inégalité.

Exemple 1 : résolution de $-2x + 1 > 9$.

$$-2x + 1 > 9$$

De la forme $ax + b > cx + d$

$$-2x > 8$$

On a soustrait 1 à chaque membre (propriété (1)).

$$x < -4$$

On a divisé chaque membre par le nombre **négatif** -2 (propriété (2)).

Les solutions de l'inéquation $-2x + 1 > 9$ sont tous les nombres strictement inférieurs à -4 .

Exemple 2 : résolution de $3x + 1 \geq x - 7$.

$$3x + 1 \geq x - 7$$

De la forme $ax + b \geq cx + d$

$$2x + 1 \geq -7$$

On a soustrait x , puis 1, à chaque membre.

$$2x \geq -8$$

On a divisé chaque membre par le nombre **positif** 2.

Les solutions de l'inéquation $3x + 1 \geq x - 7$ sont tous les nombres supérieurs ou égaux à -4 .

c Représentation des solutions sur une droite graduée

Exemple 1 : les nombres strictement inférieurs à -4 sont colorés en rouge sur cette droite graduée.



Le crochet noir (non tourné vers la partie colorée en rouge) indique que le nombre -4 **n'est pas** strictement inférieur à -4 .

Exemple 2 : les nombres supérieurs ou égaux à -4 sont colorés en rouge sur cette droite graduée.



Le crochet rouge (tourné vers la partie colorée en rouge) indique que le nombre -4 est supérieur ou égal à -4 .

1 Mettre un problème en équation et le résoudre

ÉNONCÉ

Dans une assemblée, vingt personnes ont plus de 30 ans, un quart a entre 20 et 30 ans, un tiers a moins de 20 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

SOLUTION

- On note x le nombre total de personnes.
- « Un quart des personnes » s'écrit $\frac{x}{4}$,
« un tiers des personnes » s'écrit $\frac{x}{3}$.
Donc le nombre de personnes de l'assemblée s'écrit aussi $20 + \frac{x}{4} + \frac{x}{3}$.
On doit donc résoudre l'équation :
$$x = 20 + \frac{x}{4} + \frac{x}{3}$$
- L'équation s'écrit $x = 20 + \frac{3x}{12} + \frac{4x}{12}$
puis $x = 20 + \frac{7x}{12}$ et ensuite $x - \frac{7x}{12} = 20$.
Ainsi : $\frac{5x}{12} = 20$,
 $x = 20 \times \frac{12}{5} = 48$.
48 est la solution de l'équation.
- Il y a 48 personnes dans l'assemblée.

SUR LE MÊME MODÈLE Exercices 21 à 24 page 79

2 Utiliser la bonne expression

ÉNONCÉ Brevet 2007

- On donne $E = 9 - (2x - 1)^2$.
- Développer et réduire E .
 - Calculer E pour $x = \frac{1}{2}$.

SOLUTION

- $E = 9 - (2x - 1)^2$
 $E = 9 - ((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2)$
 $E = 9 - (4x^2 - 4x + 1)$
 $E = 9 - 4x^2 + 4x - 1$
 $E = -4x^2 + 4x + 8$

Voir la suite de la solution page suivante

1 Choix de l'inconnue

La question posée aide à faire ce choix. Ici, on remarque que x est un nombre entier positif.

2 Mise en équation

On exprime chaque information donnée dans l'énoncé en fonction de l'inconnue. L'équation est obtenue en exprimant de deux façons différentes une même quantité (ici le nombre total de personnes).

3 Résolution de l'équation

On réduit le membre de droite pour se ramener à une équation de la forme $ax + b = cx + d$. Il faut penser à conclure sur la solution de l'équation.

4 Retour au problème

On conclut en répondant à la question posée dans l'énoncé.

b. Factoriser E .

d. Résoudre l'équation $E = 0$.

• On utilise $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ pour développer $(2x - 1)^2$ et on pense à écrire le développement entre parenthèses.

• Ensuite, on supprime les parenthèses précédées du signe $-$ et on réduit l'expression obtenue.

Suite de la solution

b. $E = 3^2 - (2x - 1)^2$
 $E = (3 - (2x - 1))(3 + (2x - 1))$
 $E = (3 - 2x + 1)(3 + 2x - 1)$
 $E = (4 - 2x)(2 + 2x) = 2(2 - x) \cdot 2(x + 1) = 4(2 - x)(x + 1)$

c. Pour $x = \frac{1}{2}$: $E = 9 - (2 \times \frac{1}{2} - 1)^2 = 9 - 0 = 9$
 $E = 9 - (1 - 1)^2$
 $E = 9 - 0^2 = 9$

d. D'après b, l'équation $E = 0$ s'écrit :
 $(4 - 2x)(2 + 2x) = 0$.

Ses solutions sont les nombres x tels que :
 $4 - 2x = 0$ ou $2 + 2x = 0$
 $-2x = -4$ ou $2x = -2$
 $x = 2$ ou $x = -1$.

Les solutions de l'équation $E = 0$ sont 2 et -1 .

SUR LE MÊME MODÈLE Exercices 48 à 50 page 80

Il n'y a pas de facteur commun apparent, mais on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

On dispose de trois expressions différentes de E : celle donnée par l'énoncé, celle obtenue au a, et celle obtenue au b.
• Au c, on choisit l'expression donnée dans l'énoncé pour profiter de $2 \times \frac{1}{2} = 1$. Avec les autres expressions, les calculs auraient été plus longs.
• Au d, on choisit l'expression factorisée obtenue au b ; elle permet de se ramener à une équation « produit nul ».

3 Mettre un problème en inéquation et le résoudre

ÉNONCÉ

Achetée en magasin, une cartouche d'encre noire pour imprimante coûte 17,90 €. Achetée sur un site Internet, la même cartouche coûte 16,50 €, mais il y a des frais de port, d'un montant de 4,90 € quel que soit le nombre de cartouches achetées. À partir de combien de cartouches achetées l'achat sur Internet est-il moins cher qu'en magasin ?

SOLUTION

- On note x le nombre de cartouches achetées.
- L'achat de x cartouches coûte, en euros :
• en magasin : $17,90 \times x$,
• sur Internet : $16,50 \times x + 4,90$.
« L'achat sur Internet est moins cher qu'en magasin » se traduit par l'inéquation $16,5x + 4,9 < 17,9x$.

3 L'inéquation s'écrit successivement :
 $4,9 < 17,9x - 16,5x$ puis $4,9 < 1,4x$
 $\frac{4,9}{1,4} < x$ c'est-à-dire $x > 3,5$.

Les solutions de l'inéquation $16,5x + 4,9 < 17,9x$ sont tous les nombres strictement supérieurs à 3,5.

- L'achat sur Internet est moins cher qu'en magasin si l'on achète 4 cartouches d'encre ou davantage.

SUR LE MÊME MODÈLE Exercices 60 à 62 page 81

1 Choix de l'inconnue

On remarque qu'ici x est un nombre entier positif.

2 Mise en inéquation

L'inéquation traduit ici la question posée dans l'énoncé. En particulier « moins cher » est traduit par $<$.

3 Résolution de l'inéquation

On est en présence d'une inéquation du premier degré à une inconnue. Il faut penser à conclure sur les solutions de cette inéquation.

4 Retour au problème

Parmi les solutions de l'inéquation, on ne conserve que les entiers positifs supérieurs à 3,5 : le plus petit d'entre eux est 4.

$$\begin{aligned} -1,4x &< -4,9 \\ 1,4x &> 4,9 \\ x &> \frac{4,9}{1,4} \\ x &> \frac{49}{14} \\ x &> 3,5 \end{aligned}$$

EXERCICES DE BASE

Équations du premier degré à une inconnue

1 Dans chaque cas, dire si le nombre -2 est solution de l'équation proposée.

a. $3x + 1 = 2x - 3$ b. $5n + 2 = 3n - 2$ c. $\frac{t}{2} - 3 = t - 2$

Pour les exercices 2 à 5 Résoudre chaque équation.

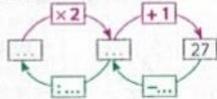
2 a. $2x + 5 = 1$ b. $7 = 4x - 3$ c. $\frac{t}{5} = \frac{1}{2}$

3 a. $2x - 4 = 3 - 5x$ b. $x - 2 = 5x - 4$

4 a. $x + 5 = -4x + 3$ b. $30 + 5t = 2 - 2t$

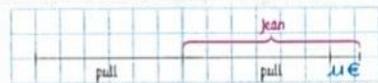
5 a. $6 - x = 5 - 4x$ b. $8y - 7 = -12y + 2$

6 a. La somme du double d'un nombre et de 1 est égale à 27. Recopier et compléter le schéma ci-dessous pour connaître ce nombre.



b. Au triple d'un nombre, on retranche 4 et on trouve 7. Quel est ce nombre ?

7 Marine a acheté un pull et un jean pour 71 €. Le jean coûte 11 € de plus que le pull. Voici une représentation de cette situation :

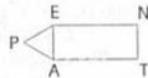


a. Parmi les nombres suivants, trouver celui qui donne le prix du pull. Indiquer le prix du pull.

• 71 - 11 • 71 : 2 - 11 • (71 - 11) : 2

b. Quel est le prix du jean ?

8 PEA est un triangle équilatéral dont le périmètre est 18 cm. ENTA est un rectangle.



a. Calculer EA.

b. Pour quelle longueur de [EN], le périmètre du pentagone PENTA est-il égal à 40 cm ?

Équations « produit nul »

Pour les exercices 9 à 14 Résoudre chaque équation.

9 a. $(x - 4)(x + 13) = 0$ b. $x(x + 3) = 0$

10 a. $2t(t - 2) = 0$ b. $(5 - 2x)(x + 1) = 0$

11 a. $0 = (3x - 5)(2x + 4)$ b. $(7 - 2y)(9 - 6y) = 0$

12 a. $(3x + 1)\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0$ b. $\left(2x + \frac{3}{4}\right)(3 - x) = 0$

13 a. $(x - 5)^2 = 0$ b. $(3x + 2)^2 = 0$

14 a. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3}) = 0$ b. $(\sqrt{6} - x)(\sqrt{2} + x) = 0$

Inéquations du premier degré à une inconnue

15 On sait que x est un nombre tel que $x \geq -2$.

Que peut-on dire alors du nombre :

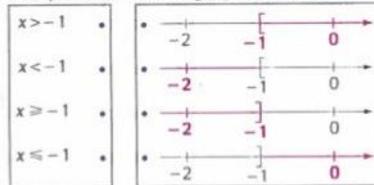
a. $x - 1$? b. $x + 2$? c. $-5 + x$?

16 On sait que x est un nombre tel que $x < 5$.

Que peut-on dire alors du nombre :

a. $2x$? b. $2x - 12$? c. $-3x$? d. $\frac{x}{2}$? e. $\frac{x}{2} - 3$?

17 Recopier et relier chaque inégalité du cadre de gauche à sa représentation en rouge du cadre de droite.



18 Résoudre chaque inéquation et représenter les solutions sur une droite graduée.

a. $3x > 12$ b. $-2x \leq 5$ c. $4x \leq -20$ d. $\frac{x}{2} < 3$

19 On considère l'inéquation $2x - 5 \leq 3$.

a. Pour chacun des nombres suivants, dire s'il est solution de cette inéquation : -2 ; $\frac{1}{2}$; 4 ; 5.

b. Résoudre cette inéquation.

c. Représenter les solutions sur une droite graduée.

EXERCICES D'APPLICATION

Équations du premier degré à une inconnue

20 Résoudre chaque équation.

a. $3(2x - 1) = 2 - (x - 3)$ b. $5 - 2(x + 3) = 3 - x$

c. $8(x - 2) = 4(2x - 4) - 3x$ d. $3(-x + 7) = -7(x + 3)$

21 Des amis organisent un repas en commun, en partageant les frais équitablement.

Si chacun donne 9 euros, il y a 8 euros en trop, mais si chacun donne 6 euros, il manque 13 euros.

Combien sont-ils ?

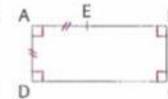
Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1, page 74.

22 Aujourd'hui, Zelda a 11 ans et Agnès a 26 ans.

Dans combien d'années l'âge d'Agnès sera-t-il le double de celui de Zelda ? Détailler la démarche suivie.

→ Brevet 2005

23 ABCD est un rectangle et E est un point du segment [AB]. $AE = AD = 3$ cm et $EB = x$ (en cm).

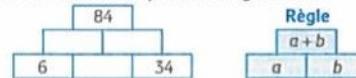


a. Exprimer le périmètre (en cm) de ABCD en fonction de x.

b. En utilisant une équation, trouver x pour que le périmètre de ABCD soit 20 cm.

→ Brevet 2004

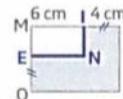
24 Recopier et compléter selon la règle indiquée. On peut noter x le nombre manquant sur la ligne du bas.



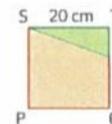
25 MALO et MINE sont deux rectangles. I est un point du côté [AM] et E un point du côté [OM].

Pour quelle longueur ME l'aire de la partie colorée est-elle égale à 50 cm² ?

Conseil : se reporter à l'atelier 1, page 76.



26 STOP est un carré de 20 cm de côté. Où faut-il placer le point A sur le segment [TO] pour que l'aire du triangle STA soit le quart de l'aire du trapèze AOPS ?



27 a. Réduire au même dénominateur $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x$. Résoudre alors l'équation $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x = 6$.

b. Résoudre l'équation $\frac{2x}{3} - 1 = 2x + 3$.

28 Les $\frac{3}{4}$ d'un nombre ajoutés à ses $\frac{2}{5}$ donnent 69. Quel est ce nombre ?

29 Claire a quatre sortes de livres dans sa bibliothèque : la moitié sont des BD, le quart sont des livres de Science-Fiction, le septième sont des romans et elle a six mangas. Quel est le nombre total de ses livres ?

Pour les exercices 30 à 32 Résoudre chaque équation.

30 $(2x + 3)(x - 5) = 2x(x - 2)$

31 $(2x - 9)(8x - 1) = (4x + 3)^2$

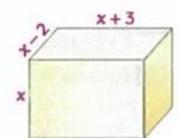
32 $(3x - 1)(3x + 1) = \left(\frac{9}{2}x - 1\right)(2x + 4)$

33 LUN est un triangle rectangle en U tel que $UN = 7$ cm et [LN] mesure 5 cm de plus que [LU].

a. On note x la longueur LU en cm. Calculer x.

b. Construire le triangle LUN.

34 x désigne un nombre supérieur à 2. Voici un parallépipède rectangle dont les dimensions sont exprimées en centimètres.



Pour quelle valeur de x l'aire totale des faces est-elle égale à l'aire des faces d'un cube de x cm d'arête ?

35 Karl, Maud et Enzo ont à résoudre le problème suivant : « Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 2 010 ».

a. Karl choisit le plus petit des nombres comme inconnue. Maud préfère prendre le « nombre du milieu ». Enzo a pris comme inconnue le plus grand des trois nombres. Voici leurs trois équations. Retrouver leur auteur.

1 $(x - 1) + x + (x + 1) = 2 010$

2 $(n - 2) + (n - 1) + n = 2 010$

3 $t + (t + 1) + (t + 2) = 2 010$

b. Quels sont ces trois nombres ?

Exercices

36 Pour ce QCM, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Pour chacune des cinq questions, indiquer le numéro de la question et recopier la réponse exacte.

1	Quelle est l'expression développée de $(3x + 5)^2$?	$3x^2 + 25$	$9x^2 + 25$	$9x^2 + 30x + 25$
2	Quelle est l'expression qui est égale à 10 si on choisit la valeur $x = 4$?	$x(x + 1)$	$(x + 1)(x - 2)$	$(x + 1)^2$
3	Quelle est la valeur exacte de $\frac{\sqrt{48}}{2}$?	$\sqrt{24}$	3,464	$2\sqrt{3}$
4	Quel est le nombre qui est solution de l'équation $2x - (8 + 3x) = 2$?	10	-10	2
5	En 3 ^e A, sur 30 élèves, il y a 40 % de filles. En 3 ^e B, sur 20 élèves, il y a 60 % de filles. Lorsque les deux classes sont réunies, quel est le pourcentage de filles dans le groupe ?	36 % de filles	48 % de filles	50 % de filles

→ Brevet 2007

Conseil : se reporter à l'atelier 2, page 77.

Équations « produit nul »

Pour les exercices 37 à 39
Résoudre chaque équation.

37 a. $3x(x - 2)(2x + 1) = 0$ b. $(x + 2)(3x + 5)(7x - 3) = 0$

38 a. $5(x^2 + 1)(3x - 4) = 0$ b. $(t - 1)(2t + 5)(4t - 3) = 0$

39 a. $(x + 3)(2 - 5x)^2 = 0$ b. $(3y - \sqrt{27})(2y + \sqrt{8}) = 0$

40 Écrire une équation ayant comme solutions :

a. -5 et 3 ; b. 0 et 0,5 ; c. -2 et $\sqrt{2}$.

41 Remplacer  par les nombres qui conviennent.

a. $(3x + \text{bleu})(2x - \text{bleu}) = 0$ a pour solutions $-\frac{4}{3}$ et $\frac{1}{2}$

b. $(2x - \text{bleu})(3 + \text{bleu}) = 0$ a pour solutions $\frac{5}{2}$ et $-\frac{3}{4}$

42 Résoudre chacune des équations.

a. $3(5 + 3x) - (x - 3) = 0$ b. $3(5 + 3x)(x - 3) = 0$

→ Brevet 2005

43 Résoudre chacune des équations.

a. $(x + 2)(3x - 5) = 0$ b. $x + 2(3x - 5) = 0$

→ Brevet 2002

Pour les exercices 44 à 47
Factoriser le membre de gauche,
puis résoudre l'équation.

44 a. $x^2 - 4 = 0$ b. $x(x - 3) + 2(x - 3) = 0$

45 a. $x^2 + 5x = 0$ b. $4x^2 - 7x = 0$

46 a. $(4x + 3)^2 - 1 = 0$ b. $(2x + 5)^2 - x^2 = 0$

47 a. $(2x + 3)^2 + (2x + 3)(5x - 1) = 0$
b. $(x - 2)^2 - (4x + 9)(x - 2) = 0$

48 On donne $E = (3x + 2)^2 - (3x + 2)(x + 7)$.

a. Développer et réduire E.

b. Factoriser E.

c. Calculer E lorsque $x = \frac{1}{2}$.

d. Résoudre l'équation $E = 0$.

→ Brevet 2007

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 2, page 74.

49 On donne $G = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(5x + 1)$.

a. Développer et réduire G.

b. Factoriser G.

c. Résoudre l'équation $G = 0$.

→ Brevet 2006

50 On considère les expressions :

$$E = (4x + 5)(x - 2) - x(x + 4)$$

et

$$F = (3x - 10)(x + 1).$$

a. En développant et réduisant E et F, vérifier que $E = F$.

b. En déduire les solutions de l'équation $E = 0$.

→ Brevet 2004

51 « Choisir un nombre et lui ajouter 4. Calculer le carré de la somme obtenue et soustraire 36. »

Quel(s) nombre(s) doit-on choisir pour obtenir 0 ?

52 1. Voici deux méthodes pour résoudre l'équation : $(x - 3)^2 = 4$.

a. Jennifer affirme : « Les nombres dont le carré est 4 sont 2 et -2. Ainsi les solutions de $(x - 3)^2 = 4$ sont les solutions des équations $x - 3 = 2$ et $x - 3 = -2$. Terminer la résolution.

b. Margaux affirme : « L'équation $(x - 3)^2 = 4$ s'écrit aussi $(x - 3)^2 - 4 = 0$. En factorisant le membre de gauche, je me ramène à une équation "produit nul". Terminer la résolution.

2. À votre tour de résoudre l'équation $(5 - 3x)^2 = 1$.

Inéquations du premier degré à une inconnue

53 On considère l'inéquation $2x - 5 \leq \frac{3}{2} - 11x$.

a. Sans chercher à résoudre cette inéquation, et en justifiant les réponses, dire si les nombres 0 et 1 sont des solutions.

b. Résoudre l'inéquation.

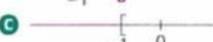
c. Représenter les solutions sur une droite graduée.

→ Brevet 2005

54 Associer à chaque inéquation la représentation de ses solutions (en rouge) qui convient.

1 $5x - 1 < 3(x - 1)$ **A** 

2 $4x - (2x - 1) \geq 3x + 2$ **B** 

3 $\frac{x + 4}{3} \geq 1$ **C** 

4 $2x - 4 < 5x - 1$ **D** 

Pour les exercices 55 à 57
Résoudre chaque inéquation et représenter ses solutions sur une droite graduée.

55 a. $3x - 2 > x + 5$ b. $2x - \frac{1}{3} \leq 3x - \frac{1}{4}$

56 a. $2x - 5 \leq 5x + 7$ b. $3(x - 1) - 2(4x - 1) \geq 0$

57 a. $2 - (5 - 2t) > 3(2t - 1)$ b. $\frac{1}{4}(3x + 1) < \frac{1}{6}(5x + 1)$

58 1. a. On note $D = \frac{4x + 2}{5}$. Calculer D pour $x = \frac{3}{4}$.

b. Le nombre $\frac{3}{4}$ est-il solution de l'inéquation $\frac{4x + 2}{5} < 3$?

2. Résoudre l'inéquation $\frac{4x + 2}{5} < 3$ et représenter ses solutions sur une droite graduée.

→ Brevet 2003

59 1. a. 60 est-il solution de l'inéquation $2,5x - 75 > 76$?

b. Résoudre l'inéquation et représenter ses solutions sur un axe. Hachurer la partie de l'axe qui ne correspond pas aux solutions.

2. Pendant la période estivale, un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 75 € par semaine pour faire, en moyenne, 150 glaces. Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il vendre de glaces, au minimum, dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 76 € ? On expliquera la démarche.

→ Brevet 2006

EXERCICES

60 Dans un magasin de location vidéo, deux formules sont proposées pour louer un film pendant le week-end :

- formule « abonné » : 60 € par an et 5,50 € par DVD ;
- formule sans abonnement : 8 € par DVD.

À partir de combien de DVD loués par an a-t-on intérêt à choisir la formule « abonné » ?

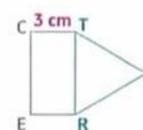
Conseil : se reporter à l'exercice résolu 3, page 75.

61 Arthur a eu 12, 9 et 13 aux trois premiers devoirs de mathématiques ce trimestre. (Son professeur met toujours des nombres entiers comme notes ; il s'agit de notes sur 20.) Arthur souhaite avoir au moins 13 de moyenne ce trimestre. Il reste un quatrième et dernier devoir.

Quelle note doit-il obtenir ? (On donnera toutes les possibilités.)

62 TRI est un triangle équilatéral. RECT est un rectangle.

Quelles sont les longueurs possibles de [CE] pour que le périmètre du rectangle soit au plus égal au périmètre du triangle ?



Calcul mental et réfléchi

63 Dans chaque cas, trouver mentalement si la phrase est vraie ou fausse.

a. -2 est la solution de l'équation $15 - 2x = 7x + 33$.

b. 5 et -3 sont les solutions de $(x + 5)(2x + 6) = 0$.

c. 1 est une solution de l'inéquation $3x - 4 < 5x + 2$.

64 Résoudre mentalement l'équation proposée.

a. $x - 1,5 = 4,5$ b. $3 = 1 - 4x$ c. $2x - 3 = 3$

d. $5x = -\frac{1}{3}$ e. $\frac{1}{2}x = 5$ f. $2x + \frac{1}{10} = 2,5$

65 Résoudre mentalement l'équation proposée.

a. $x^2 = 9$ b. $x^2 = 7$ c. $2x(3x - 1) = 0$

d. $(-1 - x)(2 - 4x) = 0$ e. $(2x - 8)(-x + 3) = 0$

66 Résoudre mentalement l'inéquation proposée.

a. $4x < 8$ b. $-2x > 3$ c. $5x - 1 < 4$

d. $-3x + 6 > 0$ e. $1 - 4x \leq 1$ f. $2x + 3 > 1$

67 À la piscine, le prix d'une entrée est 3,40 €. On peut aussi prendre une carte de dix entrées, valable un an, qui coûte 17 €.

Calculer mentalement à partir de combien d'entrées par an l'achat de la carte est avantageux.

QCM POUR S'ÉVALUER



Pour ces questions, une seule réponse est exacte.

	a	b	c
68 L'équation $(2x + 3) - (5x - 1) = 0$ a pour solution(s)...	$-\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{3}$
69 L'équation $(3x - 5)(2x + 10) = 0$ a pour solution(s)...	$\frac{11}{5}$	$-\frac{5}{3}$ et 5	$\frac{5}{3}$ et -5
70 L'équation $(x + 3)^2 = 4$ a pour solution(s)...	-1	-5	-1 et -5
71 Les solutions de l'inéquation $2x + 1 < 4x - 2$ sont toutes les valeurs de x vérifiant...	$x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$	$x < -\frac{3}{2}$
72 Les solutions de l'inéquation $8x + 5 \leq 5x - 1$ sont représentées en rouge sur la figure...			
73 « Il y a cinq ans, j'avais la moitié de l'âge que j'aurai dans cinq ans. Quel est mon âge ? » Ce problème peut se mettre en équation ainsi...	Si x désigne son âge il y a 5 ans : $2x = x + 10$	Si x désigne son âge actuel : $2x - 5 = x + 5$	Si x désigne son âge dans 5 ans : $x = 2(x - 5)$
74 Le problème posé à la question précédente se conclut par...	« Il a 10 ans »	« Il a 15 ans »	« Il a 20 ans »
75 x désigne un nombre supérieur à 4. Le périmètre du rectangle est strictement inférieur au périmètre du triangle équilatéral pour...	$x < 5$	$0 < x < 5$	$4 < x < 5$

Pour ces questions, plusieurs réponses sont exactes.



	a	b	c
76 L'équation $5x + 2 = 3x - 1$ a la même solution que...	$5 - (2 - 3x) = x$	$3(2x - 1) = (x - \frac{3}{4}) \times 8$	$\frac{x}{6} + 1 = \frac{3}{4}$
77 Les solutions sont des nombres décimaux pour...	$(3x - 6)(5x + 3) = 0$ <i>chiffre fini après la virgule</i>	$(3x + 2)(2x - 1) = 0$	$7x(6 - 4x) = 0$
78 Une solution de l'inéquation $x - 4 \geq 2(x + 1)$ est...	-10	-6	0
79 L'inéquation $3x - 2 \leq 4x - 1$ a les mêmes solutions que...	$7x - 3 \geq 6x - 4$	$-2x + 5 \leq 7$	$3(x - 5) + 12 \geq x - 5$

Vérifiez vos réponses p. 307.

OBJECTIF BREVET

80 Avec une aide

On donne un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 4.
- Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
- Ajouter 4 à ce produit.
- Écrire le résultat.

1. Écrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait fonctionner ce programme avec le nombre -2, on obtient 0.
2. Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 5.
3. a. Faire deux autres essais en choisissant à chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un autre nombre entier.

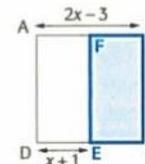
- b. En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul ? Justifier la réponse.
4. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

→ Brevet 2007

Aide
3. b. Notez n le nombre choisi et appliquez le programme de calcul. Développez le résultat, puis factorisez avec une identité remarquable.
4. Utilisez la factorisation obtenue à la question 3. b. On peut se reporter à l'exercice 52 page 80.

81 Avec une aide

1. Résoudre l'inéquation : $2x - 3 \geq x + 1$.



2. x désignant un nombre supérieur ou égal à 4, ABCD est un carré dont le côté mesure $2x - 3$.

- a. Montrer que l'aire du rectangle BCEF s'exprime par la formule :

$$s_l = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x + 1).$$

- b. Développer et réduire s_l .
- c. Factoriser s_l .
- d. Résoudre l'équation :

$$(2x - 3)(x - 4) = 0.$$

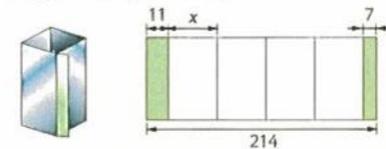
- e. Pour quelles valeurs de x , l'aire du rectangle BCEF est-elle nulle ?

→ Brevet 1999

Aide
2. a. Utilisez l'aire du carré ABCD et l'aire du rectangle ADEF.
c. Vous pouvez contrôler votre factorisation en lisant la question d.

Sans aide maintenant

- 82 Le schéma ci-dessous représente le développement des côtés d'un réservoir à base carrée. On veut calculer la longueur d'un côté (les dimensions sont données en cm). On appelle x la largeur d'un côté.



- a. Compléter : $214 = 11 + \dots$
- b. Résoudre l'équation ainsi obtenue.
- c. Donner en cm la longueur d'un côté.

→ Brevet 2004

- 83 a. Résoudre l'inéquation $x + 15 \geq \frac{2}{3}(x + 27)$.

- b. Un bureau de recherche emploie 27 informaticiens et 15 mathématiciens. On envisage d'embaucher le même nombre x d'informaticiens et de mathématiciens. Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque sorte pour que le nombre de mathématiciens soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'informaticiens ?

→ Brevet 2005