3 Puissances. Écritures littérales

Vérifier ses acquis
- fiche 8 p. 296
- fiche 10 p. 297

TEST de démarrage

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 Comprendre la notation puissance

L'écriture 4^3 signifie ...

a. 4×3 **b.** $4 \times 4 \times 4$ **c.** $3 \times 3 \times 3 \times 3$

2 Connaître les règles de calcul sur les puissances de dix

$10^3 \times 10^{-4}$ est égal à ...

a. 10^{-12} **b.** -10 **c.** 0,1

3 Connaître l'écriture scientifique d'un nombre décimal

L'écriture scientifique de 450,1 est ...

a. $4{,}501 \times 10^2$ **b.** $4\,501 \times 10^{-1}$ **c.** $0{,}4501 \times 10^3$

4 Traduire par une expression littérale

n désigne un nombre entier. Le carré du nombre entier suivant n s'écrit ...

a. $(n+1)^2$ **b.** n^2+1 **c.** $2(n+1)$

5 Réduire une somme

Une autre écriture de l'expression $2x + 5x$ est ...

a. $10x^2$ **b.** $7x^2$ **c.** $7x$

6 Développer et réduire une expression littérale

x désigne un nombre relatif. L'expression développée et réduite de $(2x-3)(4x+5)$ est ...

a. $6x - 15$ **b.** $8x^2 - 15$ **c.** $8x^2 - 2x - 15$

7 Factoriser une expression littérale

x désigne un nombre relatif.
Une factorisation de $3x^2 - 15x$ est ...

a. $3x(x-15)$ **b.** $-12x^2$ **c.** $3x(x-5)$

1 Puissances d'un nombre relatif

a Notation puissance

DÉFINITION

a désigne un nombre relatif et n désigne un nombre entier positif.
La notation a^n désigne une puissance de a et se lit « a exposant n ».

- Pour $n \geqslant 2$: $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ (si $a \neq 0$)
- Lorsque $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Ainsi, a^{-n} est l'inverse de a^n.

Exemples : • $5^2 = 5 \times 5 = 25$ • $(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$ • $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

b Cas particulier : les puissances de 10

PROPRIÉTÉS

Quel que soit le nombre entier positif n : • $10^n = 1\underbrace{0...0}_{n \text{ zéros}}$ • $10^{-n} = \underbrace{0,0...0}_{n \text{ zéros}}1$

Exemples : • $10^6 = 1\,000\,000$ (un million) • $10^{-3} = 0,001$ (un millième)

c Règles de calcul

PROPRIÉTÉS

a et b désignent des nombres relatifs **non nuls**, m et n désignent des nombres entiers relatifs.

• $a^m \times a^n = a^{m+n}$ • $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ • $(a^m)^n = a^{mn}$ • $(ab)^n = a^n b^n$ • $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemples : • $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$;
• $\dfrac{4^7}{4^{-2}} = 4^{7-(-2)} = 4^9$; • $(7^2)^3 = 7^{2\times3} = 7^6$.

Exemples : • $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times (\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$;
• $(4x)^3 = 4^3 \times x^3 = 64x^3$; • $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2} = \dfrac{9}{16}$.

2 Développement

Développer, c'est transformer un produit en somme.

PROPRIÉTÉS

k, a, b, c, d désignent des nombres relatifs.

Règles de distributivité : • $k(a+b) = ka + kb$ • $k(a-b) = ka - kb$

Règle de double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple 1 : développer $A = -5x(2x-3)$.
$A = -5x(2x-3) = -5x \times 2x - (-5x) \times 3$
$A = -5 \times 2 \times x \times x + 5 \times 3 \times x$ donc $A = -10x^2 + 15x$.

On applique $k(a-b) = ka - kb$ avec $k = -5x$, $a = 2x$, $b = 3$.

Exemple 2 : développer et réduire $A = (4x-3)(2x+5)$.
$A = (4x-3)(2x+5)$
$A = 4x \times 2x + 4x \times 5 - 3 \times 2x - 3 \times 5$
$A = 8x^2 + 20x - 6x - 15$
$A = 8x^2 + 14x - 15$

On développe en considérant que : $A = (4x + (-3))(2x+5)$.

On réduit « les termes en x » : $20x - 6x = (20-6)x = 14x$.

3 Identités remarquables

PROPRIÉTÉS

a et b désignent des nombres relatifs.

• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

On dit que $2ab$ est **le double produit**, c'est le double du produit ab.

• $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemple 1
$(x+5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$
$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

Exemple 2
$(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2$
$(2x-7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$

Exemple 3
$(t+5)(t-5) = t^2 - 5^2$
$(t+5)(t-5) = t^2 - 25$

4 Factorisation

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

a Avec un facteur commun

Pour factoriser, on peut utiliser les règles de distributivité : $ka + kb = k(a+b)$ et $ka - kb = k(a-b)$.
On dit que k est **un facteur commun** aux termes ka et kb.

Exemple 1 : factoriser $A = 3x^2 - x$.
$A = x \times 3x - x \times 1$
$A = x(3x-1)$

Exemple 2 : factoriser $B = (2x+1)^2 + (2x+1)(x+4)$.
$B = (2x+1)(2x+1) + (2x+1)(x+4)$
$B = (2x+1)((2x+1) + (x+4))$
$B = (2x+1)(3x+5)$

b Avec une identité remarquable

Pour factoriser, on peut aussi utiliser les identités remarquables sous la forme :

• $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ • $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ • $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exemple 1
$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2$
$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

Exemple 2
$y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \times 3 \times y + 3^2$
$y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2$

Exemple 3
$m^2 - 64 = m^2 - 8^2$
$m^2 - 64 = (m+8)(m-8)$

1 Organiser un calcul avec des puissances

ÉNONCÉ

Sans utiliser la calculatrice et sans poser d'opération, calculer $A = \dfrac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times 15^2}$.

SOLUTION

$A = \dfrac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times (3 \times 5)^2}$

- La présence de puissances de 3 et de 5 peut faire penser à écrire : $15 = 3 \times 5$.
On sait que $(ab)^n = a^n b^n$ donc $(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$.

$A = \dfrac{2^8 \times \cancel{3^2} \times 5^7}{2^3 \times \cancel{3^2} \times 5^2}$

$A = 2^{8-3} \times 5^{7-2}$

$A = 2^5 \times 5^5$

- $\dfrac{2^8 \times 5^7}{2^3 \times 5^2} = \dfrac{2^8}{2^3} \times \dfrac{5^7}{5^2}$; pour chaque facteur, on applique ensuite la règle $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$A = (2 \times 5)^5$

- On sait que $a^n \times b^n = (ab)^n$ donc $2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5$.

$A = 10^5$

Donc $A = 100\,000$.

SUR LE MÊME MODÈLE *Exercice 24 page 58*

2 Développer une expression

ÉNONCÉ

Développer, puis réduire : $A = (5x - 3)^2$ et $B = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) - (x - 1)(x - 3)$.

SOLUTION

- $A = (5x - 3)^2$

$A = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2$

- On reconnaît $(a - b)^2$ avec $a = 5x$ et $b = 3$.
On applique l'identité remarquable :
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(bien noter que b **n'est pas** -3).

$A = 25x^2 - 30x + 9$

- On réduit l'expression obtenue :
$(5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$
et $2 \times 5x \times 3 = 2 \times 5 \times 3 \times x = 30x$.

- $B = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) - (x - 1)(x - 3)$

$B = \left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 - 1^2 - (x - 1)(x - 3)$

- Pour le premier produit, on reconnaît :
$(a - b)(a + b)$ avec $a = \dfrac{1}{2}x$ et $b = 1$.
On applique l'identité remarquable :
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$B = \dfrac{1}{4}x^2 - 1 - (x^2 - 3x - x + 3)$

$B = \dfrac{1}{4}x^2 - 1 - x^2 + 3x + x - 3$

- Il faut penser à écrire le développement de $(x - 1)(x - 3)$ entre parenthèses, puis à les supprimer avec la règle de suppression des parenthèses précédées du signe $-$.

$B = -\dfrac{3}{4}x^2 + 4x - 4$

SUR LE MÊME MODÈLE *Exercices 40 à 43 page 59*

3 Factoriser une expression

ÉNONCÉ

Factoriser : $A = 2(5x - 1)^2 - (2 + 3x)(5x - 1)$ et $B = (t + 1)^2 - 100$.

SOLUTION

- $A = 2(5x - 1)^2 - (2 + 3x)(5x - 1)$

$A = 2(5x - 1)\mathbf{(5x - 1)} - (2 + 3x)\mathbf{(5x - 1)}$

- On remarque que $\mathbf{(5x - 1)}$ est un facteur commun apparent.
On factorise en utilisant $ak - bk = (a - b)k$ avec :
$a = 2(5x - 1)$, $b = (2 + 3x)$ et $k = (5x - 1)$.

$A = [2(5x - 1) - (2 + 3x)]\mathbf{(5x - 1)}$

- **Ne pas oublier** les parenthèses dans $(2 + 3x)$; avant de les supprimer, on observe qu'elles sont précédées du signe $-$.

$A = (10x - 2 - 2 - 3x)(5x - 1)$

$A = (7x - 4)(5x - 1)$

- $B = (t + 1)^2 - 100$

$B = (t + 1)^2 - 10^2$

- Il n'y a pas de facteur commun apparent. Mais en écrivant 100 sous la forme 10^2, on reconnaît :
$a^2 - b^2$ avec $a = (t + 1)$ et $b = 10$.

$B = (t + 1 + 10)(t + 1 - 10)$

- On factorise à l'aide de l'identité remarquable :
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

$B = (t + 11)(t - 9)$

SUR LE MÊME MODÈLE *Exercices 55 à 58 page 60*

4 Développer en présence de racines carrées

ÉNONCÉ

On considère le nombre $A = (3 - 4\sqrt{5})(3 + 4\sqrt{5})$.
Montrer que A est un nombre entier relatif.

SOLUTION

$A = (3 - 4\sqrt{5})(3 + 4\sqrt{5})$

$A = 3^2 - (4\sqrt{5})^2$

- On utilise $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec :
$a = 3$ et $b = 4\sqrt{5}$.

$A = 3^2 - 4^2(\sqrt{5})^2$

- Pour élever le **produit** $4\sqrt{5}$ au carré, il faut penser à élever chaque facteur au carré :
$(4\sqrt{5})^2 = 4^2(\sqrt{5})^2$.

$A = 9 - 16 \times 5$

$A = 9 - 80$

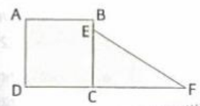
$A = -71$

SUR LE MÊME MODÈLE *Exercices 62 à 64 page 61*

3 Identités remarquables et géométrie

ÉNONCÉ *Brevet*

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré dont le côté a pour longueur x, ECF est un triangle rectangle en C, le point E étant un point du segment [BC]. On donne $FC = 4$.



1. a. Exprimer l'aire, notée $\mathcal{A}$, du carré ABCD en fonction de x.

b. Calculer $\mathcal{A}$ pour $x = 2 + \sqrt{2}$ (on donnera le résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont des nombres entiers).

2. On suppose que x est supérieur à 1.

a. Sachant que la longueur BE est égale à 0,5 cm, calculer, en fonction de x, l'aire, notée $\mathcal{A}'$, du triangle rectangle ECF.

b. On note S la somme, en fonction de x, des deux aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$. Vérifier que :

$$S = x^2 + 2x - 1.$$

3. Calculer S pour $x = 2 + \sqrt{2}$ (on donnera le résultat sous la forme $c + d\sqrt{2}$, où c et d sont des nombres entiers).

Le jour du brevet
Sur votre copie, il est important de numéroter les questions et d'utiliser la numérotation indiquée dans l'énoncé.

SOLUTION

1.a. $\underline{\mathcal{A} = x^2}$

b. Pour $x = 2 + \sqrt{2}$, on obtient :

$\mathcal{A} = (2 + \sqrt{2})^2$

$\mathcal{A} = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

$\mathcal{A} = 4 + 4\sqrt{2} + 2$

$\underline{\mathcal{A} = 6 + 4\sqrt{2}}$

2.a. $CE = CB - BE = x - 0,5$

$\mathcal{A}' = \dfrac{CF \times CE}{2}$

$\mathcal{A}' = \dfrac{4(x - 0,5)}{2}$

$\mathcal{A}' = 2(x - 0,5)$

$\underline{\mathcal{A}' = 2x - 1}$

b. $S = \mathcal{A} + \mathcal{A}' = \underline{x^2 + 2x - 1}$

3. Pour $x = 2 + \sqrt{2}$, on obtient :

$S = (2 + \sqrt{2})^2 + 2(2 + \sqrt{2}) - 1$

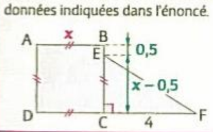
D'après la question 1.b., on a :

$S = 6 + 4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} - 1$

$S = 6 + 4 - 1 + (4 + 2)\sqrt{2}$

$\underline{S = 9 + 6\sqrt{2}}$

Coder la figure
Il est conseillé de coder la figure au fur et à mesure de la lecture des données indiquées dans l'énoncé.



S'organiser
On peut penser à simplifier la fraction avant de développer le numérateur :

$\dfrac{4(x - 0,5)}{2} = \dfrac{\cancel{2} \times 2(x - 0,5)}{\cancel{2}}$
$= 2(x - 0,5)$

Réfléchir
Notez qu'il est ici inutile de développer à nouveau $(2 + \sqrt{2})^2$; il suffit d'utiliser le résultat trouvé à la question **1.b**.

POUR S'EXERCER *Exercice 68 page 61*

EXERCICES DE BASE

Puissances d'un nombre relatif

1 Donner l'écriture décimale de chaque nombre.
a. 2^3 **b.** $(-3)^2$ **c.** 2^{-1} **d.** 5^{-2}

2 Donner l'écriture décimale de chaque nombre.
a. 10^3 **b.** 10^9 **c.** 10^{-1} **d.** 10^{-4}

3 Écrire chaque nombre à l'aide d'une puissance de 10.
a. 100 000 **b.** 1 **c.** 0,01 **d.** 0,00001

4 Recopier et compléter.
a. $2^2 \times 2^5 = 2^{\cdots}$ **b.** $3^4 \times 3^5 = 3^{\cdots}$
c. $10^4 \times 10 = 10^{\cdots}$ **d.** $6^{-4} \times 6^2 = 6^{\cdots}$

5 Recopier et compléter.
a. $\dfrac{8^5}{8^3} = 8^{\cdots}$ **b.** $\dfrac{7^3}{7} = 7^{\cdots}$ **c.** $\dfrac{10^6}{10^{-1}} = 10^{\cdots}$
d. $\dfrac{5^{-3}}{5^{-6}} = 5^{\cdots}$ **e.** $\dfrac{2^2}{2^4} = 2^{\cdots}$ **f.** $\dfrac{10^3}{10^6} = 10^{\cdots}$

6 Recopier et compléter.
1. a. $(2^5)^3 = 2^{\cdots}$ **b.** $(3^{-4})^2 = 3^{\cdots}$ **c.** $(10^3)^{-2} = 10^{\cdots}$
2. a. $(3x)^2 = \ldots\ldots x^{\cdots}$ **b.** $(-2x)^3 = \ldots\ldots x^{\cdots}$

7 Écrire chaque expression sous la forme d'une puissance d'un seul nombre.
a. $5^2 \times 3^2$ **b.** $4^5 \times 2^5$ **c.** $2^6 \times 5^6$ **d.** $10^2 \times 2^2$
e. $\dfrac{5^2}{4^2}$ **f.** $\dfrac{2^5}{7^5}$ **g.** $\dfrac{10^3}{20^3}$ **h.** $\dfrac{16^3}{4^3}$

8 Écrire chaque nombre sous forme fractionnaire.
a. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$ **b.** $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^3$ **c.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ **d.** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4$

Expressions littérales

9 Recopier et compléter, sans calculatrice.

x	−3	−1	0	0,002	0,5	1,1	20
x^2							
x^3							
$2x - 1$							

→ *Brevet 2002*

10 x désigne un nombre relatif. On note :
$$A = (x - 1)^2 - 5x.$$
Calculer A lorsque $x = 5$, $x = 0$, $x = -3$.

11 Réduire dans chaque cas.
a. $2x - 5x$ **b.** $1 + 4t - 2 - t$
c. $2 - (3 + 4x)$ **d.** $x - 1 - (2x - 3)$

Développement

12 Développer.
a. $2(x - 4)$ **b.** $-3(2x - 1)$ **c.** $4(4 - 3t)$

13 Développer et réduire.
a. $(2x + 5)(x + 1)$ **b.** $(2y - 1)(3y + 2)$
c. $(x + 7)(3x - 1)$ **d.** $(2t - 3)(2t - 1)$

Identités remarquables

14 Développer à l'aide du modèle indiqué.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
a. $(x + 3)^2 =$	**c.** $(x - 3)^2 =$
b. $(x + 0,5)^2 =$	**d.** $(x - 0,1)^2 =$

15 On sait que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Développer :
a. $(x + 9)(x - 9)$; **b.** $(x - 1)(x + 1)$; **c.** $(t + 2)(t - 2)$.

16 Développer avec une identité remarquable.
a. $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$ **b.** $\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2$ **c.** $\left(x + \dfrac{2}{3}\right)\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$

Factorisation

17 Recopier et compléter pour factoriser l'expression.
a. $5x^2 - 3x = (\ldots\ldots)x$
b. $(x + 4)^2 + 5(x + 4) = (x + 4)(\ldots\ldots)$

18 Factoriser dans chaque cas.
- $A = (x - 3)^2 + 2x(x - 3)$
- $B = 4t^2 - 16t$
- $C = x^2 - 36$
- $D = x^2 + 2x + 1$

EXERCICES D'APPLICATION

Puissances d'un nombre relatif

19 On donne $A = 4x^2 - 5x + 2$.
Calculer A pour $x = 5$, puis pour $x = -5$.

20 On donne $B = -5x^2 + 2x - 1$.
Calculer B pour $x = \frac{1}{2}$, puis pour $x = -2$.

Pour les exercices 21 et 22
Écrire sous la forme d'une puissance d'un seul nombre.

21 **a.** $3^4 \times 3^7 \times 3^{-2}$ **b.** $\dfrac{7 \times (7^{-2})^{-4}}{7^{11}}$

22 **a.** $\dfrac{4^2 \times 4^3}{4^{-2}}$ **b.** $\dfrac{(5^3)^{-2} \times 5^{-4}}{5^3}$

23 **a.** Écrire $2^4 \times 4^2 \times 8^3$ sous la forme 2^n, avec n nombre entier.
b. Écrire $\dfrac{9^4 \times 18^5}{6^5 \times 27^3}$ sous la forme 3^n, avec n nombre entier.

24 Sans utiliser la calculatrice et sans poser d'opération, calculer $A = \dfrac{3^7 \times 4^8 \times 5^4}{2^5 \times 5^{-7} \times 9^3}$.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 52.*

25 Informatique
Pour les nouvelles technologies, l'unité de stockage des informations est l'octet. Par définition :
1 gigaoctet (Go) = 2^{30} octets ;
1 teraoctet (To) = 2^{40} octets.
La capacité mémoire d'un baladeur MP3 est 8 Go.
Grâce aux progrès de la technologie, sa capacité mémoire devrait doubler tous les six mois.
Donner (en To) la capacité mémoire qu'il aura dans trois ans et demi.

26 Recopier et compléter. Contrôler ensuite avec la calculatrice.
a. $0{,}003 = 3 \times 10^{\cdots}$ **b.** $0{,}05 = 5 \times 10^{\cdots}$
c. $1{,}25 = 12{,}5 \times 10^{\cdots}$ **d.** $0{,}0012 = \ldots\ldots \times 10^{-3}$
e. $12{,}56 = \ldots\ldots \times 10^{-2}$ **f.** $13{,}75 = \ldots\ldots \times 10^{-1}$

27 Trouver tous les nombres inconnus tels que :
a. $x^2 = 9 \times 10^{12}$; **b.** $\dfrac{a^2}{27} = 3 \times 10^{-12}$.

28 Pour chaque nombre, dire si c'est un nombre entier.
• $A = \dfrac{16 \times 10^{-1} \times 2}{(10^3)^2 \times 10^{-8} \times 80}$ • $B = \dfrac{-2 \times 10^{-3} \times 25 \times (10^2)^2}{50 \times 10^5 \times (-0,1) \times 10^{-3}}$

29 Pour chaque nombre, donner son écriture décimale, puis son écriture scientifique.
• $A = \dfrac{2{,}5 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^5}{15 \times 10^{-4}}$ • $B = \dfrac{210 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^5}{35 \times 10^4}$

→ *Brevet 2006*

30 Calculer en utilisant l'écriture scientifique de chaque nombre et donner l'écriture scientifique du résultat.
a. $\dfrac{100\,000 \times 10\,000 \times 1\,000\,000\,000}{10 \times 1000}$
b. $50\,000\,000 \times 0{,}000\,002$
c. $(30\,000 \times 300)^2$ **d.** $0{,}000\,003^4$

→ *Brevet 2002*

31 Écriture scientifique et calculatrice

Info
Voici comment procéder pour obtenir l'écriture scientifique d'un nombre avec la calculatrice :
• **Casio Collège 2D :** effectuer préalablement les réglages suivants : SHIFT MODE (SET UP) 7 (Sci) 9 .
• **TI-Collège :** un nombre étant affiché à l'écran, taper 2nde ((►a•10ⁿ) ENTRER pour obtenir son écriture scientifique.

Dans chaque cas, donner l'écriture scientifique en indiquant toutes les étapes du calcul, puis vérifier avec la calculatrice.
• $A = \dfrac{31 \times (10^{-3})^2}{16 \times 10^5 \times 5 \times 10^3}$ • $B = \dfrac{81 \times 10^{-5} \times 14 \times 10^2}{7 \times 10^4}$

32 Dans chaque cas, donner l'écriture décimale, puis l'écriture scientifique en détaillant les calculs. Vérifier avec la calculatrice.
• $A = \dfrac{2 \times 10^5 \times (3 \times 10^{-3})^2}{15 \times 10^{-4}}$ • $B = 3 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$
• $C = 153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}$

33 En Chimie
La masse d'un atome de carbone est égale à $1{,}99 \times 10^{-26}$ kg.
Les chimistes considèrent des paquets de $6{,}022 \times 10^{23}$ atomes.
a. Calculer la masse en grammes d'un tel paquet d'atomes de carbone.
b. Donner une valeur arrondie de cette masse à un gramme près.

→ *Brevet 2005*

34 Thème de convergence
Une ronce vous a griffé. Une goutte de sang apparaît.
Dans 1 mm³ de sang, il y a environ 5 millions de globules rouges. Notre corps contient environ 5 litres de sang.
Donner le nombre de globules rouges présents dans notre corps. Écrire ce nombre sous la forme $a \times 10^n$ (a et n entiers).

Développement

35 Océane a développé une expression, voici sa réponse.

$2x(3x - 5) - 5(2x - 1) = 6x^2 - 20x - 5$

a. Tester cette égalité pour $x = 0$. Que peut-on en déduire ?
b. Voici le détail de la copie d'Océane.
Quelle erreur a-t-elle commise ? Développer correctement cette expression.

$$\begin{aligned} &2x(3x - 5) - 5(2x - 1) \\ &= 2x \times 3x - 2x \times 5 - 5 \times 2x - 5 \times 1 \\ &= 6x^2 - 10x - 10x - 5 \\ &= 6x^2 - 20x - 5 \end{aligned}$$

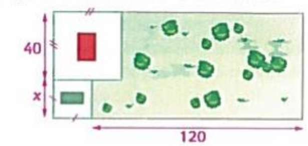
36 Développer et réduire.
$A = (4x + 1)(x - 4) - 4x(1 - 5x)$
$B = 2x(3x - 1) - (1 - 4x)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

37 Développer et réduire.
$C = (7t + 3)(t - 4) - (t - 2)(t + 6)$
$D = 2x(8x - 1) - (4x - 5)(4x - 1)$

38 On donne $E = (3x - 5)(2x - 1) - 4(x - 1)$.
1. Développer et réduire E.
2. Pour chacune des valeurs proposées, calculer la valeur de E en précisant l'expression utilisée.
a. $x = 0$ **b.** $x = -1$ **c.** $x = \frac{1}{2}$ **d.** $x = \frac{2}{3}$

Exercices

39 Une parcelle est formée :
– d'un terrain carré de 40 m de côté ;
– d'un autre terrain carré de côté inconnu x ;
– d'un terrain coloré en vert ci-dessous.
Les dimensions sont exprimées en m avec $x \leqslant 40$.
$\mathcal{A}$ désigne l'aire en m² du terrain coloré en vert.



1. Calculer $\mathcal{A}$ lorsque :
• $x = 20$; • $x = 30$; • $x = 40$.
2. **a.** Trouver deux méthodes différentes pour exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x.
b. Développer, puis réduire, chacune des deux expressions trouvées.

Identités remarquables

40 Développer, puis réduire :
$A = (2 - 3x)^2$ et $B = \left(\frac{3}{2} - 2x\right)\left(\frac{3}{2} + 2x\right) - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 2, page 52.*

Pour les exercices 41 à 43
Développer, puis réduire.

41 $A = (4x - 1)^2 + (x + 2)^2$
$B = (5t + 4)^2 + (5t + 4)(5t - 4)$

42 $A = (7x - 1)^2 + (7x + 1)^2$
$B = (5a - 4)(a + 2) - (a + 2)^2$

43 $A = -3(t - 2) + 5(t - 1)^2$
$B = 4\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - (x - 4)(x + 4)$

44 Recopier et compléter pour que chaque égalité soit vraie pour toutes les valeurs de x.
a. $(x + \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots + 6x + \ldots\ldots$
b. $(\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2 = 4x^2 - \ldots\ldots + 25$.
c. $(7x + \ldots\ldots)(\ldots\ldots - \ldots\ldots) = \ldots\ldots - 64$.

→ *Brevet 2002*

45 Sans calculatrice et sans poser d'opération, calculer :

a. 98^2 ; **b.** 52×48.

46 Sans calculatrice et sans poser d'opération, calculer :

a. 501^2 ; **b.** 98×102.

47 **a.** Développer et réduire $(2x+1)^2 - (2x-1)^2$.

b. En déduire **mentalement** $200\,001^2 - 199\,999^2$.

48 **a.** Développer et réduire $x^2 - (x+1)(x-1)$.

b. En déduire **mentalement** :

$$1\,234\,567^2 - 1\,234\,568 \times 1\,234\,566.$$

49 **Avec modération**

a.
$$\begin{aligned}(3+5)^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times 5 + 5^2\\ &= 9 + 30 + 25\\ &= 64.\end{aligned}$$

Le calcul d'Antoine est-il exact ? Qu'en pensez-vous ?

b. Calculer rapidement $\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right)^2$.

50 On note $N = (7x+3)^2 - (7x-3)^2$.

a. Exprimer plus simplement N en fonction de x.

b. Calculer **mentalement** $73^2 - 67^2$.

c. ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 7x+3$ et $AC = 7x-3$ avec $x \geqslant 1$. Calculer AB lorsque $x = 21$.

Factorisation

Pour les exercices 51 à 53
Repérer un facteur commun, le souligner, puis factoriser. Tester l'égalité obtenue.

51 $A = 5x^2 - 3x$
$B = (x-1)^2 - 2(x-1)$
$C = (2x+1)(3x-4) + 5(2x+1)$

52 $A = 7(x-2) - (4x+1)(x-2)$
$B = 3(2x-1) - (2x-1)^2$
$C = t^2 - t(2t-3)$

53 $A = (2x+5)^2 + 2x + 5$
$B = (3x-1)^2 - (3x-1)$
$C = (t-3)(2t-1) + t - 3$

54 On donne $E = (2x-3)(x+2) - 5(2x-3)$.

a. Développer et réduire E.

b. Factoriser E.

c. Pour chaque valeur de x, calculer la valeur de E en précisant l'expression utilisée.

• $x = 0$ • $x = -2$ • $x = \frac{3}{2}$ • $x = 3$

55 Factoriser :

$A = (5x+1)^2 - (x-3)(5x+1)$ et $B = (2x+3)^2 - 36$.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 3, page 53.*

Pour les exercices 56 à 58
Reconnaitre une identité remarquable et factoriser.

56 $A = x^2 - 2x + 1$ $B = 36 - 49x^2$
$C = 4x^2 - 9$ $D = x^2 - 10x + 25$
$E = t^2 + 4t + 4$ $F = t^2 + 14t + 49$

57 $A = (2a-1)^2 - (3a+2)^2$ $B = 9 - 64x^2$
$C = 9 + 30x + 25x^2$ $D = 25x^2 - 30x + 9$
$E = 16x^2 - 8x + 1$ $F = 9t^2 + 24t + 16$

58 $A = -x^2 + 1$ $B = (9x-5)^2 - 16x^2$
$C = (5y+8)^2 - 25$ $D = -16a^2 + 25$
$E = 1 + 4x^2 + 4x$ $F = 25 + 36t^2 + 60t$

59 Recopier et compléter pour que chaque égalité soit vraie pour toutes les valeurs de x.

a. $49x^2 - \ldots\ldots = (\ldots\ldots + 3)(\ldots\ldots - 3)$

b. $\ldots\ldots + 10x + \ldots\ldots = (x + \ldots\ldots)^2$

c. $\ldots\ldots - 42x + 49 = (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2$

d. $x^2 - \ldots\ldots + 64 = (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2$

60 On donne $E = 9 - (2x-1)^2$.

a. Développer et réduire E.

b. Factoriser E.

c. Calculer E pour $x = \frac{1}{3}$.

→ **Brevet 2006**

61 On considère l'expression :

$$E = (3x+2)^2 - (3x+2)(x+7).$$

a. Développer et réduire E.

b. Factoriser E.

c. Calculer E pour $x = \frac{1}{2}$.

→ **Brevet 2007**

Avec des racines carrées

62 On donne $A = (2\sqrt{3} + 4)(2\sqrt{3} - 4)$.
Montrer que A est un nombre entier relatif.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 4, page 53.*

Pour les exercices 63 et 64
Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où c est un nombre positif.

63 **a.** $(\sqrt{3} + 5)^2$ **b.** $(1 + \sqrt{2})^2$ **c.** $(4 - \sqrt{5})^2$

64 **a.** $(2\sqrt{5} + 7)^2$ **b.** $(3\sqrt{2} - 1)^2$ **c.** $(7 - 2\sqrt{6})^2$

65 Factoriser :

$A = 4x^2 + 4\sqrt{2}x + 2$ et $B = x^2 - 5$.

66 Recopier et compléter pour que chaque égalité soit vraie pour toutes les valeurs de x.

a. $x^2 - \ldots\ldots = (\ldots\ldots + 2\sqrt{2})(\ldots\ldots - 2\sqrt{2})$

b. $x^2 + 2\sqrt{3}\,x + \ldots\ldots = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)^2$

c. $\ldots\ldots - 2\sqrt{5}\,x + \ldots\ldots = (x - \ldots\ldots)^2$

67 *Toutes les étapes du calcul devront figurer sur la copie.*
On donne : $A = \frac{2}{7} - \frac{15}{7} : \frac{5}{4}$; $B = \frac{4 \times 10^5 \times 15 \times 10^{-3}}{80 \times 10^{-1}}$;

$C = \sqrt{75} + 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48}$; $D = (2 + 4\sqrt{5})(2 - 4\sqrt{5})$.

a. Donner A sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Donner les écritures décimale et scientifique de B.

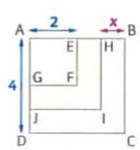
c. Écrire C sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier relatif.

d. Montrer que D est un nombre entier.

→ **Brevet 2007**

Conseil : *se reporter à l'atelier 2, page 55.*

68 **a.** Sur cette figure, AEFG, AHIJ et ABCD sont des carrés. Exprimer AH en fonction de x ; en déduire l'aire de AHIJ.
Puis préciser dans la liste ci-dessous, la ou les expressions qui correspondent à l'aire de la partie colorée :



$M = (4-x)^2 - 2^2$; $N = (4-x-2)^2$; $P = 4^2 - x^2 - 2^2$.

b. Développer et réduire $Q = (4-x)^2 - 4$.
Que peut-on en déduire ?

c. Calculer Q pour $x = 2$.
Que traduit ce résultat pour la figure ?

d. Calculer Q pour $x = \sqrt{2} - 1$.

→ **Brevet 2001**

Conseil : *se reporter à l'atelier 3, page 56.*

Démontrer

69 Démontrer que la somme des carrés de deux nombres impairs consécutifs quelconques est un nombre pair.

Conseil : *se reporter à l'atelier 1, page 54.*

70 Démontrer que la différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs quelconques est un multiple de 8.

71 Démontrer que pour tout nombre entier n supérieur à 1, le nombre $n^3 - n$ est le produit de trois nombres entiers à préciser.

Calcul mental et réfléchi

72 Calculer **mentalement**.

a. $\frac{5^3}{0{,}5^3}$ **b.** $\frac{25^2}{5^2}$ **c.** $\frac{37^2}{74^2}$

73 Calculer **mentalement**.

a. $5^3 \times 2^3$ **b.** $25^7 \times 4^7$ **c.** $2^4 \times 4^4 \times 1{,}25^4$

74 Calculer **mentalement**.

a. $(5+3)^2$ **b.** $(10{,}5 - 4{,}5)^2$ **c.** $(3+2)^2 - (3^2 + 2^2)$

d. $16^2 - 15^2$ **e.** $56^2 - 54^2$ **f.** $27^2 - 23^2$

75 Calculer **mentalement** le coefficient de x dans le développement de chaque expression.

a. $(3x+5)^2 + (x^2+7)$ **b.** $(9x-1)^2 - 4x^2$

c. $(2x-3)(4x+1) + 2x(x+4)$

76 Développer et réduire **mentalement**.

a. $(3x+1)^2$ **b.** $(4a-5)^2$ **c.** $(8x-5)(8x+5)$

77 Donner **mentalement** le nombre manquant pour que l'expression soit un carré.

a. $x^2 - 8x + \ldots\ldots$ **b.** $x^2 + \ldots\ldots x + 9$

QCM POUR S'ÉVALUER

Pour ces questions, une seule réponse est exacte.

	a	b	c
78 Un nanomètre (nm) vaut 0,000 000 001 m. Un m vaut …	10^9 nm	10^6 nm	10^{-9} nm
79 $3^2 \times 3^4$ est égal à …	9^8	3^8	3^6
80 Le double de 2^5 est …	4^5	2^6	2^{10}
81 $(5^2)^3$ est égal à …	5^8	5^5	5^6
82 $\left(\frac{2}{3}x\right)^2$ est égal à …	$\frac{2}{3}x^2$	$\frac{4}{3}x^3$	$\frac{4}{9}x^2$
83 L'écriture scientifique de $\frac{5\times(10^{-2})^3}{8\times10^{-3}}$ est …	$0{,}625\times10^{-3}$	$6{,}25\times10^{-5}$	$6{,}25\times10^{-4}$
84 $(4t+5)^2$ est égal à …	$16t^2+40t+25$	$16t^2+20t+25$	$4t^2+40t+25$
85 $(10-5x)(10+5x)$ est égal à …	$20-25x^2$	$100-25x^2$	$100+25x^2$
86 $(2t-3)^2$ est égal à …	$4t^2-9$	$4t^2+12t-9$	$4t^2-12t+9$
87 $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$ est un nombre …	entier	rationnel non entier	irrationnel
88 Quel que soit le nombre entier n, le nombre $(n+1)^2+n^2+1$ est un multiple de …	2	3	5
89 $16x^2-8x+1$ peut s'écrire …	$(4x-1)^2$	$(4x+1)^2$	$(8x-1)^2$
90 Une factorisation de $\frac{25}{16}-\frac{1}{4}y^2$ est …	$\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}y\right)^2$	$\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}y\right)$	$\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}y\right)^2$

Pour ces questions, plusieurs réponses sont exactes.

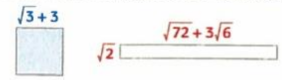
	a	b	c
91 $\frac{2^3}{4^3}$ est égal à …	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$
92 $3x^2+6x$ peut s'écrire …	$3x(x+3)$	$3x(x+2)$	$x(3x+6)$
93 $(2x-1)(x-3)-(4x+1)(x-3)$ peut s'écrire …	$(-2x-2)(x-3)$	$-2(x-3)(x+1)$	$-2x(x-3)$
94 Quel que soit le nombre x, l'expression $(x-1)^2+2x$ peut s'écrire …	$(x+1)^2$	x^2+1	$(x+1)^2-2x$

Vérifiez vos réponses p. 307.

OBJECTIF BREVET

95 Avec une aide

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont données en cm.
La mesure du côté du carré est $\sqrt{3}+3$.
Les dimensions du rectangle sont $\sqrt{72}+3\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$.



a. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du carré ; réduire l'expression obtenue.

b. Calculer l'aire $\mathcal{A}'$ du rectangle.

c. Vérifier que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

→ **Brevet 2006**

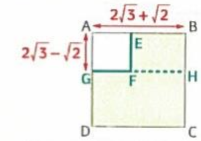
Aide

a. Le résultat sera réduit sous la forme : … + … $\sqrt{3}$.

c. Il faut présenter $\mathcal{A}'$ sous la forme … + … $\sqrt{3}$, en utilisant les règles de calcul sur les racines carrées.

Sans aide maintenant

96 Sur la figure ci-dessous, ABCD et AEFG sont des carrés et ABHG est un rectangle.



Calculer, sous la forme la plus simple possible, les valeurs exactes :

a. du périmètre du rectangle ABHG ;

b. de la longueur DG ;

c. de l'aire du domaine coloré ;

d. de l'aire du rectangle ABHG.

→ **Brevet 2000**

97 Avec une aide

On donne :

$$D = 9x^2 - 4 + (3x-2)(x-3).$$

a. Développer et réduire D.

b. Factoriser $9x^2-4$ et en déduire la factorisation de D.

c. Calculer la valeur de D avec l'expression qui paraît la mieux adaptée, lorsque :

• $x=0$; • $x=-1$; • $x=\frac{2}{3}$; • $x=\frac{1}{4}$.

→ **Brevet 2007**

Aide

b. • Pour factoriser $9x^2-4$, on utilisera une identité remarquable.

• Dans l'expression de D donnée au début de l'énoncé, on remplacera $9x^2-4$ par la factorisation trouvée. Ensuite, on factorisera D en repérant un facteur commun.

Sans aide maintenant

98 On considère l'expression :

$$E = 9x^2 - 25 + (3x-5)(2x+15).$$

1. Développer et réduire l'expression E.

2. a. Factoriser $9x^2-25$.

b. En utilisant la question **a.**, factoriser l'expression E.

→ **Brevet 2007**

99 Trouver la bonne réponse parmi les trois réponses proposées.

		1	2	3
A	$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ est égal à :	$\frac{2}{15}$	0,277	$\frac{5}{18}$
B	$1-\frac{3}{2}\times\frac{2}{9}$ est égal à :	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{5}{18}$
C	$(1+2)^2$ est égal à :	1^2+2^2	1^3+2^3	6
D	$\sqrt{4+16}$ est égal à :	10	6	$2\sqrt{5}$
E	$\sqrt{8}-\sqrt{2}$ est égal à :	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	1,41
F	Pour tout nombre x, $(2x-3)^2$ est égal à :	$2x^2-12x+9$	$4x^2-9$	$4x^2-12x+9$
G	Pour tout nombre x, x^2-100 est égal à :	$(x-10)(x+10)$	$(x-10)^2$	$(x-50)^2$

→ **Brevet**